函数的连续性：第一次小测复习

by 混合 2206 谢集

1 函数极限

1.1 函数极限的定义

函数极限的定义会比数列极限的定义更加复杂一些，因为它的定义域（可能）是 $\mathbb{R}$，所以会出现这些情况：

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} f(x)$$

这里写出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的定义，大家可以自己补上其他的定义。

> **定义**：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x)$ 满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限为 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

特别地，还有左极限和右极限的定义：

> **定义**：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域内有定义，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，$f(x)$ 满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限为 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$。

注意第四个极限的定义，这是一个常见的坑点，我们得同时考虑 x 趋向正无穷和负无穷的情况。

1.2 函数极限定义的相关证明

这一块不是重点，随便看看课本上的例题就可以，我只放一个简单的题目。

> **例题 1.1**：证明：$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x_0 = \sin x_0$。

> Hint.
> 三角函数证明**最重要**的一个小技巧是什么？

证明：先按照定义写出来，我们现在要证明对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$。现在的问题是，我们无法将 $\sin x-\sin x_0$ 和 $|x-x_0|$ 直接联系起来。

怎么办呢？有一个东西叫做**和差化积**：

$$|\sin x-\sin x_0|=|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|$$

根据 $|\sin x|<|x|$ 就得到了：

$$|\sin x-\sin x_0|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\le 2|\frac{x-x_0}{2}|=|x-x_0|$$

这个结论很经典，在后面拉格朗日中值定理的应用中可能还会再见一次。那么我们只要取 $\delta=\varepsilon$，就证完了。

1.3 函数极限的性质

和数列极限类似的：唯一性、局部有界性、局部保号性、保不等式性、夹逼性（迫敛性）、四则运算法则、单调有界定理、柯西收敛准则，这里就不再赘述。

> **Heine 定理**：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$x_n\ne x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

定理的证明是一个经典的套路：

简单的是左推右，我们可以直接用定义来证明。对于每一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，我们需要证明对于 $\forall\varepsilon>0$，都存在一个 N $(*)$，使得当 $n>N$ 时，$|f(x_n)-A|<\varepsilon$。直接根据函数极限的定义，对于**这个** ε，我们可以找到一个 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$。

因为 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，所以本身就存在一个「N」，使得当 $n>N$ 时，$0<|x_n-x_0|<\delta$，这个「N」就是我们最开始 $(*)$ 处需要的。

右推左证明就有点难以下手了，为什么？「任意」太奇怪了，我们不可能枚举所有的数列啊。这时候就需要用到**反证法**。

假设所有满足收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$x_n\ne x_0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，却出现「$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ne A$」的情况！我们尝试推出矛盾。

展开定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ne A$，那么存在一个 ε_0，使得对于任意 $\delta>0$，都存在一个 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$，但 $|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。我们可以找到一个数列 $\{x_n\}$，使得 $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$，且 $|f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0$，这样就产生了矛盾。

> 怎么理解 $\neq x_0$?
> A 可以是无穷吗?
> x_0 可以是无穷吗?
> 可以改成左右极限的形式吗?

如果 $x_n = x_0$，那么对于可去间断点的情况，就不成立了。

后面三个问题，当然都是可以的。

> **推论**：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：对于任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$x_n \neq x_0$，有 $f(x_n)$ 收敛。

> Hint.
> 这样的推论有什么用?

当然是证明极限不存在的时候啦。

> **例题 1.2：** 证明：$\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x^2}$ 不存在。

取一个子列，$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}}$，那么 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$，但是 $\sin \dfrac{1}{x_n^2}$ 是正负交替的，所以极限不存在。

> **例题 1.3:** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调有界，$\{x_n\}$ 为实数列，则下列陈述中错误的是：
> A.若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{f(x_n)\}$ 必发散
> B.若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 必收敛
> C.若 $\{f(x_n)\}$ 发散，则 $\{x_n\}$ 必发散
> D.若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 必收敛。

> Hint.
> 如果你没想到反例，可以思考一下自己漏掉了什么经典模型。

AD 显然是错的。B 显然是对的，单调有界定理。

C 也是错的。为什么呢？考虑有跳跃间断点的函数，只要 $\{x_n\}$ 落在跳跃间断点两边反复横跳，就可以让 $\{f(x_n)\}$ 发散，但 $\{x_n\}$ 仍然收敛。

1.4 重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1.5 无穷小量、无穷大量

请写出有界量、无穷小量和无穷大量的定义：

> **定义**：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义：
>
> - 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，那么就称 f 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量。
> - 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty(+\infty/-\infty)$，那么就称 f 是 $x\to x_0$ 时的（正/负）无穷大量。
> - 如果存在 $M>0$，使得在 x_0 的某个去心邻域内，$|f(x)|<M$，那么就称 f 是 $x\to x_0$ 时的有界量。

> **定义**：若 f,g 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量：
>
> - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 f 是关于 g 的高阶无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))$。
> - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则称 f 是关于 g 的同阶无穷小量。
> - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称 f 是关于 g 的低阶无穷小量。
> - 特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 f 是关于 g 的等价无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)$。

举个例子：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\arcsin x\sim\arctan x\ (x\to 0)$$

$$(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x\ (x\to 0)$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0)$$

最后一个需要 Taylor 展开，但不排除老师会考这个，因为比较常见而且可以用半角公式推导。

变式：$\forall k\in\mathbb{R},\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n=e^k$。

> **定理**：若 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$，则：
>
> - 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)=A$；
> - 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=A$。

无穷小量的加减法有不确定性，比如课本经典的例题：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0?$$

思考一下，如何避免这种情况发生呢?

只要我们在加减法中老老实实把无穷小量写出来:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - x + o(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^3}$$

这是无法确定的数，所以矛盾也就不存在了。

正常的解法应该是用 Taylor 展开，我们后面会学，现在大家可以随便看看:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

> **例题 1.4**: 设 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷小量，$g(x)$ 无穷大量，$h(x)$ 是有界量，下列说法正确的是:
> A. $x \to x_0$ 时，$g(x) + h(x)$ 是无穷大量;
> B. $x \to x_0$ 时，$f(x) + h(x)$ 是无穷小量;
> C. $x \to x_0$ 时，$f(x)h(x)$ 是无穷小量;
> D. $x \to x_0$ 时，$g(x)h(x)$ 是无穷大量。

A 是对的。B 肯定不对，只要 $h(x)$ 是非零有界量，$f(x) + h(x)$ 就不是无穷小量。

C 是对的，D 也不对，如果 $h(x) = 0$，那么 $g(x)h(x)$ 就是无穷小量。

> **例题 1.5**: 设 $\alpha(x) = \dfrac{8 - x}{4 + x}, \beta(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$，当 $x \to 8$ 时，下列陈述正确的是:
> A. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶非等价无穷小量;
> B. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量;
> C. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量;
> D. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更低阶的无穷小量。

直接上定义对比:

$$\lim_{x \to 8} \frac{8 - x}{(4 + x)(2 - \sqrt[3]{x})} = \frac{1}{12} \lim_{x \to 8} \frac{8 - x}{2 - \sqrt[3]{x}}$$

现在有个问题，我们没法用已知的等价无穷小量来解决这个问题——因为不是我们学过的 $(1+x)^\alpha$！但不要忘了高中的技巧——换元。

设 $t=\sqrt[3]{x}$，那么 $x=t^3$，所以：

$$\frac{1}{12}\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{2-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{12}\lim_{t\to 2}\frac{8-t^3}{2-t}=\frac{1}{12}\lim_{t\to 2}\frac{(2-t)(4+2t+t^2)}{2-t}=1$$

答案是 B。

> **例题 1.6**：设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2}+\cos 2x)}{\ln(1+x^2)}$。

看起来这么复杂，但是我们可以把给出来的条件凑出来：

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2}+\cos 2x)}{e^{x^2}+\cos 2x-2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+\cos 2x-2}{\ln(1+x^2)}$$

再利用等价无穷小量：

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+\cos 2x-2}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x^2+o(x^2)}{x^2}=-2$$

> **例题 1.7**：判断下列说法的正确性：
>
> - $o(x^2)+o(x^3)=o(x)\ (x\to 0)$；
> - $o(x)\cdot o(x)=o(x^2)\ (x\to 0)$；
> - $\frac{o(x^2)}{o(x)}=o(x)\ (x\to 0)$；

按照定义前两个都是对的，但是第三个不对，因为 $o(x)$ 可能是 $o(x^2)$，也可能是 $o(x^3)$，有可能比 $o(x^2)$ 更高阶。

$o(x)$ 的意思是比 x 更高阶的无穷小量，所以 $o(x^2)$ 也是 $o(x)$，$o(x^2)$ 不一定比 $o(x)$ 更高阶，$o(x)$ 也不一定是 $o(x^2)$。

2 函数连续性

2.1 函数连续性的定义

> **定义**：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

同样的，也有左连续和右连续的定义，请自行补全。

> **间断点**：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，那么称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点/不连续点。
> **可去间断点**：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，但 $f(x_0)$ 无定义，或者 $f(x_0)\neq A$。
> **跳跃间断点**：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$。
> **第一类间断点**：可去间断点和跳跃间断点的统称。
> **第二类间断点**：至少有一侧的极限不存在。

> **定义**：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则称 $f(x)$ 是在 I 上的连续函数。

> **定义**：狄利克雷函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$。

这是一个**极限处处不存在**的函数，所以每一个点都是**第二类间断点**。

> **定义**：黎曼函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1,n>0\\ 0, & x=0,1 \text{ or } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$。

这是一个**极限处处存在**的函数，每一点的极限都是 0，所以每一个有理点都是**可去间断点**，每一个无理点都是**连续点**。

> **例题 2.1**：考察函数 $f(x)=x(x-\sqrt{2})(x-2)D(x)$ 的连续性，其中 $D(x)$ 是狄利克雷函数。

尽管有理数和无理数都是稠密的，但是在 $x=0,\sqrt{2},2$ 的时候，$f(x)$ 都会被「压」到 0。证明也是简单的，这里不再赘述（因为就等价于证明 $\lim\limits_{x\to 0} x=0$）。

所以 $f(x)$ 在 $x=0,\sqrt{2},2$ 处存在极限，且极限为 0，所以 $f(x)$ 在 $x=0,\sqrt{2},2$ 处连续，在其他点是第二类间断点。

「存在一个函数，只在 $x=a,b,c$ 处连续，其余地方不连续」的构造就是这样。

> **例题 2.2**：证明或证伪：设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x^2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 为常值函数。

手玩一下发现好像是对的，但是怎么证明呢？

先证明：对于任意 $x_0\in[0,1)$，$f(x_0)=f(0)$。

构造数列 $x_n=x_{n-1}^2$，那么 $f(x_0)=f(x_n)$，所以**两边同时取极限**必定有：

$$f(x_0)=f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Heine 定理，由于 $\{x_n\}$ 收敛于 0，且函数极限存在（因为连续），所以 $f(x_n)$ 也收敛于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，再根据函数连续的性质：

$$= f(0)$$

证明完毕！

$x = 1$ 的证明就简单了，因为其邻域里所有的数都是 $f(0)$，而且 f 在 $x = 1$ 处连续，所以 $f(1) = f(0)$。

2.2 函数连续性的性质

同样地，连续函数也满足四则运算、局部保号、有界等性质。还有一个很重要的性质就是连续函数的复合性质：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，函数 $g(y)$ 在点 $y_0 = f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g(f(x))$ 在点 x_0 处连续。

有了这些定理（这里省略反函数的连续性定理），我们就可以证明初等函数（由常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数）的连续性了。

> **定理**：一切初等函数在其定义区间上连续。

这样在后续的极限计算中，我们就可以很放心地直接把一些 $\lim$ 给去掉了。

2.3 闭区间上连续函数

这一块对证明的要求会高一些，如果只是准备小测，可以先不看证明。

这些定理的可以用这样一个顺畅的逻辑去记忆：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

先证明有界，然后再证明最值可以取到。

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值和最小值，即存在 $c,d \in [a,b]$，使得 $f(c) \geq f(x), \forall x \in [a,b]$，$f(d) \leq f(x), \forall x \in [a,b]$。

接下来是更强的结论，每个中间值都能取到：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，最大值和最小值分别为 M 和 m，那么对于任意 $y \in [m,M]$，都 $\exists c \in [a,b]$，使得 $f(c) = y$。

常见的推论就是零点定理：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，那么 $\exists c \in (a, b)$，使得 $f(c) = 0$。

> **例题 2.3**：证明或证伪：如果 x_0 是**连续函数** f 在 (a, b) 内唯一极值点，则其是 f 在 $[a, b]$ 上的最值点。

手玩一下发现这是对的。分类讨论就可以证明了。

不妨设 $f(x_0)$ 是极大值，假设 $f(x_1) \neq x_0$ 为 f 的最大值点且 $f(x_1) > f(x_0)$，**不妨设** $a \leq x_1 < x_0$。

那么根据极大值的定义，首先肯定存在一个 $x_2 \in (a, x_0), f(x_2) < f(x_0)$。所以 (x_1, x_0) 之间必定存在一个最小值点。那这个最小值点必定也是极小值点（都一个这么大的区间最小了，更别说邻域了），所以矛盾。

> **例题 2.4**：证明或证伪：如果函数 f 在 (a, b) 上连续且有界，则 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 都存在。

连续有界，极限一定存在吗？不，考虑**震荡函数**，比如 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}\ x \in (0, 1)$。

> Hint.
> 积累这个重要模型，后面学到导数后还能派上用场。

闭区间连续函数还有一个很强的结论，在此之前我们先介绍一个概念：

2.4 一致连续性【小测不考】

一致连续是一个比连续性更强的性质，它的定义是这样的：

> **定义**：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得 $\forall x_1, x_2 \in I$，只要 $|x_1 - x_2| < \delta$，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，那么就称函数 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

> Hint.
> 理解一致连续的关键就是，他比连续性强在哪里？

强在：δ **不依赖于** x_1, x_2，对于任意的 $\varepsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，对于定义域都成立。

直接放出这个最强的结论：

> **cantor 定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。

一致连续的性质非常重要，他为很多闭区间上函数性质的证明提供了比连续性更强的条件。在后续黎曼可积的证明以及数分 2 的学习中，你会再次感受到这点。

和连续性一样，如何判断一函数在某个区间上不一致连续呢？和函数连续的判断一样，这里给出一个定理：

> **定理**：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是：$\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset I$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$。

> **定理**：函数 $f(x)$ 在**有限**区间 I 上一致连续的充分必要条件是：$\forall\{x_n\}\subset I$，若 $\{x_n\}$ 是柯西列，则 $\{f(x_n)\}$ 也是柯西列。

> **例题 2.5**：删除掉**有限**这个条件，这个定理还成立吗?

函数 $f(x)=x^2$ 在 $x\in[0,+\infty)$，右推左就不成立了。

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$、$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在。

> **例题 2.6**：判断下列函数在给定区间上是否一致连续：
>
> - $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上；
> - $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上；
> - $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上；
> - $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上。
> - $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上。
> - $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上。

第一个不一致连续，构造子列 $x_n=n+\dfrac{1}{n}$，$y_n=n$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=2$。

第二个是一致连续的。证明考虑：

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{|x_1-x_2|}}=\sqrt{|x_1-x_2|}$$

这种例子有很多，大家可以把课本习题中判断的例子都刷一遍。

第三个是一致连续的，和第一个例题一样的证明方法。

第四个是不一致连续的，构造子列 $x_n=\sqrt{2\pi n}$，$y_n=\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=1$。

第五个是不一致连续的，可以用 cantor 定理推论，也可以构造子列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=1$。

第六个是一致连续的，用 cantor 定理推论。

> **例题 2.7**：证明 $f(x)=x^a\sin x(a>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续。

取子列。

$$x_n=2n\pi+(\frac{1}{n})^a,y_n=2n\pi$$

$$(2n\pi+\frac{1}{n^a})^a\sin\frac{1}{n^a}$$

$$=\frac{1}{n^a}(2n\pi+\frac{1}{n^a})^a\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}}$$

$$=(2\pi+\frac{1}{n^{a+1}})^a\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(2\pi+\frac{1}{n^{a+1}})^a\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}}=(2\pi)^a$$

总结一下三角函数取子列的思路——让 $\sin$ 里面变成特殊值即可。

> **例题 2.8**：证明 $f(x)=x^a\sin x(a<-1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续。

最简单的方法是用 cantor 定理的推论，显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 的右极限不存在，那么对于 $(0,1)$ 就不一致连续，更不用说 $(0,+\infty)$ 了。

取子列也能做：

$$f(x)=x^{a+1}\frac{\sin x}{x}$$

取：

$$x_n=n^{\frac{1}{a+1}},y_n=(1+n)^{\frac{1}{a+1}}$$

$$f(y_n)-f(x_n)=(1+n)\frac{\sin y_n}{y_n}-n\frac{\sin x_n}{x_n}$$

$$x_n>y_n,\frac{\sin y_n}{y_n}>\frac{\sin x_n}{x_n}$$

$$f(y_n)-f(x_n)\geq(1+n)\frac{\sin x_n}{x_n}-n\frac{\sin x_n}{x_n}=\frac{\sin x_n}{x_n}$$

由极限的保序性，

$$\lim_{n\to\infty}[f(y_n)-f(x_n)]\geq 1$$

得证。

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在区间 I 满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L>0$，使得 $\forall x_1,x_2\in I$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$，那么 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

> Hint.
> 这是充分必要条件吗?

不是的，$f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上就不满足（导数是无穷呀）。

> **例题 2.9**：若 $f(x)$ 在 $[A,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[A,+\infty)$ 上一致连续。

课本经典的分类讨论习题，由于大家都做过，这里不再赘述（x）。

3 杂题选讲

由于周六的时候潘学长已经讲过数列了，所以我这边只放一部分题目作为参考。

> **例题 3.1**：下列说法正确的是：
> A. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_n+b_n\}$ 必发散。
> B. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_nb_n\}$ 必发散。
> C. 若正项数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散，则 $\{a_nb_n\}$ 必发散。
> D. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$，则数列 $\{a_n\}$ 必收敛。

A 肯定是对的，B 的话考虑 $a_n=0$ 就否定了。C 的话考虑 $a_n=\begin{cases}1, & n\text{ odd}\\ 2, & n\text{ even}\end{cases}$，$b_n=\begin{cases}2, & n\text{ odd}\\ 1, & n\text{ even}\end{cases}$。

D 的话，你发现这好像比 Cauchy 收敛更弱，那么就可以考虑一个 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 不存在的例子。

正巧，这个例子就是 $\dfrac{1}{n}$。所以取 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n| = 0$，但是 a_n 发散。

同理，也可以取 $a_n = \ln n$。

> **例题 3.2**：下列说法正确的是：
> A. 若数列 $\{x_n\}$ 无界，则一定存在一个它的单调子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$。
> B. 若数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 均收敛，则 $\{x_n\}$ 也收敛。
> C. 若数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$、$\{x_{3n}\}$ 均收敛，则 $\{x_n\}$ 也收敛。
> D. 若数列 $\{x_n\}$ 每一个子列都收敛，则 $\{x_n\}$ 也收敛。

A 手玩不出反例，考虑直接证明他。

因为 $\{x_n\}$ 无界，所以我们可以找到一个 x_{n_1}，使得 $|x_{n_1}| > 1$，然后我们找到一个 $n_2 > n_1$，使得 $|x_{n_2}| > 2$，以此类推，我们可以得到一个极限为 ∞ 的子列。

回忆 Bolzano-Weierstrass 定理：有界数列必有收敛子列。其实有更强的结论就是：**每个数列必有单调子列**。那么取这个单调的子列，就可以证明 A。

证明数列必有单调子列的方法是什么?

假设当前我处在 x_n，如果后面有一个 $x_m (m > n)$ 比 x_n 大，那么我就走到 x_m。

- (1) 如果可以一直走下去，那么我就找到了一个单调递增的子列。
- (2) 如果在一个地方「停下来了」，也就是后面的所有数都比 x_n 小。我们不妨设这种点叫做「停止点」，是不可以走的。
- (3) 如果「停止点」有无穷多个，那么我们就找到了一个单调递减的子列。
- (4) 否则我们只要跳过这有限个「停止点」，开始按照 (1) 的方法走，就可以找到一个单调递增的子列。

B 肯定是错的，可以奇偶性分开构造。D 肯定是对的，我们看 C。

$3n$ 这个下标又很好地规避了奇偶错位的情况，所以很可能是对的！我们来证明它。

首先我们证明，如果 B 选项两个奇偶子列极限相同，比如 L，那么 $\{x_n\}$ 也收敛于 L。证明也是简单的，对于任意的 $\varepsilon > 0$，我们可以找到一个 $N_1 > 0$，使得 $\forall 2n > N_1, |x_{2n} - L| < \varepsilon$，找到一个 $N_2 > 0$，使得 $\forall 2n+1 > N_2, |x_{2n+1} - L| < \varepsilon$，那么取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，就得证了。

然后我们证明，如果两个奇偶子列不收敛于一个数，$\{x_{3n}\}$ 不可能收敛。证明也是简单的，因为 $\{x_{3n}\}$ 下标也一奇一偶，可以找到 $\{x_3, x_9, x_{15}, ...\}$ 这样收敛于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ 的子列，也可以找到 $\{x_6, x_{12}, x_{18}, ...\}$ 这样收敛于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$ 的子列，这两个极限不相同，所以一个收敛数列存在两个不同极限的子列，矛盾！

> **例题 3.3**：$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是 m 个正数，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$。

这是一个经典模型，夹逼定理：

$$\sqrt[n]{\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}^n} \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le \sqrt[n]{m \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}^n}$$

> **例题 3.4**：
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$$
>
> 和
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!}{(n+1)!}$$

两个题目都可以用 Stolz 定理秒杀。虽然有些班可能没讲 Stolz，但这个定理真的特别好用：

> **定理**（Stolz 定理）：设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列，若满足：
>
> - $\frac{*}{\infty}$ 型：$\{b_n\}$ 严格单调增加且趋于 $+\infty$；
> - $\frac{0}{0}$ 型：$\{b_n\}$ 严格单调递减且趋于 0，$\{a_n\}$ 趋于 0;
>   则有：
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

第一题：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

第二题：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n!}{n\cdot n!} = 1$$

不过两题都是有常规解法的。

第一题：

可以发现 $n!$ 增长太快了，我们大可以把一些不要的东西放缩掉，用夹逼定理：

$$n! < 1! + 2! + \cdots + n! < (n-1)!(n-1) + n!$$

但是这样做左边是 1，右边是 2，所以再扔掉一些：

$$n! < 1! + 2! + \cdots + n! < (n-2)(n-2)! + (n-1)! + n!\ (n \geq 2)$$

这样夹逼就是：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!} = 1$$

第二题：

其实是一个经典裂项，$n \cdot n! = (n+1)! - n!$，所以：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - 1!}{(n+1)!} = 1$$

> **例题 3.5**：求
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(1 + 2^{2022} + 3^{2022} + \cdots + n^{2022})}$$

有小学奥数经验（当然后面学积分也就知道了）的同学知道这样一个结论：$1^k + 2^k + \cdots + n^k$ 是一个 $k+1$ 次的多项式，所以可以猜到答案是 $\frac{1}{2023}$。

但是怎么证明呢？夹逼定理就可以了。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n\cdot n^{2022})} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(1 + 2^{2022} + 3^{2022} + \cdots + n^{2022})} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n\cdot (\frac{n}{2})^{2022})}$$

> **例题 3.6**：求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$。

sin 里面的东西肯定是越来越趋向 πn 的，答案应该是 0。怎么证明呢？所以我们考虑把它与 πn 的差构造出来：

$$= \lim_{n\to+\infty} \sin[\pi(n - n + \sqrt{n^2+1})]$$

令

$$-n + \sqrt{n^2+1} = y = \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi n + \pi y)$$

则原式绝对值

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sin \pi y \leq |\frac{\pi}{n}|$$

由夹逼定理得证。

4 习题

- 当 $x \to 1$ 时，$\alpha(x) = \cos \dfrac{\pi}{2} x$ 与$\beta(x) = A(x-1)^n$ 为等价无穷小量，求 A 和 n 的值。

老老实实用定义做就可以了。

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{A(x-1)^n}$$

换个元：

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cos \dfrac{\pi}{2}(y+1)}{Ay^n}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin \dfrac{\pi}{2} y}{Ay^n}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\dfrac{\pi}{2}}{Ay^{n-1}} = 1$$

$$\therefore A = -\frac{\pi}{2}, n = 1$$

- 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sin \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n+1})$

还是不要忘了和差化积。

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sin \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1}\right)\right) \sin(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1}\right))$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot 2\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2n(n+1)} = \pi$$

当然这题可以用拉格朗日中值定理做，不过这是后话。

- 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+6x+8}-(ax+b))=1$，求 a,b 的值。

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+6x+8}-(ax+b))$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(9x^2+6x+8)^2-(ax+b)^2}{\sqrt{9x^2+6x+8}+(ax+b)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(9-a^2)x^2+(6-2ab)x+(8-b^2)}{\sqrt{9x^2+6x+8}+(ax+b)} = 1$$

观察分子分母的阶数，$9-a^2=0, a=\pm3$。

- 若 $a=3$，原式 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+6x+8}-(ax+b))$ 发散。
- 若 $a=-3$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(6+6b)x+(8-b^2)}{\sqrt{9x^2+6x+8}-3x+b} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(6+6b)x+(8-b^2)}{-3x-3x+b} = 1 \Rightarrow 6+6b=-6, b=-2.$

- 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$。证明：$g(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

直接上极限的定义。对一个需要证明的 $\varepsilon>0$：

设 $x>X$ 时 $|f(x)-g(x)|<\frac{1}{4}\varepsilon$，而且根据一致连续的定义, $|x_1-x_2|<\delta_1, |f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}\varepsilon, |g(x_1)-g(x_2)| \le |f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_1)-g(x_1)|+|f(x_2)-g(x_2)|<\varepsilon$。所以 $g(x)$ 在 $[X,+\infty]$ 上一致连续。

再根据 cantor 定理，$g(x)$ 在 $[0,X]$ 上一致连续。现在我们只需要证明两个闭区间的一致连续函数的并是一致连续函数！也就是

> **命题**：$f(x)$ 在 $[A,B]$ 上是一致连续函数,在 $[B,C]$ 上是一致连续函数，证明在 $f(x)$ 在 $[A,C]$ 上一致连续。

直接取一个 ε，然后 $x_1 < x_2 \le B$ 说明一下，$B < x_1 < x_2$ 说明一下，$x_1 \le B < x_2$ 用绝对值不等式说明一下即可。

- 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续函数，$f(0)=0, f(1)=1$，并且 $\forall x\in[0,1]$，有 $f(f(x))=x$。证明 f 在 $[0,1]$ 上 **严格**单调递增，并由此进一步证明，$\forall x\in[0,1]$，有 $f(x)=x$。

（第一反应是可以取反函数，这个需要第一问的证明。我们先证第一问。）

考虑反证法。假设存在 $a<b, f(a)\ge f(b)$，而对于任意的 $x_1<x_2 (x_1,x_2\in[0,1])$，若 $f(x_1)=f(x_2), f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Rightarrow x_1=x_2$，矛盾！

所以 $x_1\ne x_2 \Rightarrow f(x_1)\ne f(x_2)\ (*)$。不过我们还是说明不了 $>$ 矛盾。

但是 $f(0)=0<1=f(1)$，那么如果连续函数不单调，肯定会有相等吧！这就是我们的切入口。

$\because f(a)\ge f(b)$，那么 $f(0)=0\le f(b)\le f(a)$，根据中间值定理，$[0,a]$ 之间必有 ξ 使得 $f(\xi)=f(b)$。和 $*$ 式矛盾！所以得证。

第二问就简单了。假设存在 $f(x)>x$, 那么根据单调性 $x=f(f(x))>f(x)$，直接矛盾。$f(x)<x$，也是同理的。

附：根据反函数存在性定理，严格单调说明 f^{-1} 存在，这就引出了一个简单的命题：

> **命题**：设 $f(x):[a,b]\to[a,b]$，$f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow f(x)=x$。