数学分析

1 微分与导数

1.1 微分的定义

定义**差分**

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

对于某一点x_0，若存在一个只与x_0有关而与Δx无关的数$g(x_0)$，使得$\Delta x \to 0$时有：

$$\Delta y = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

则称函数$f(x)$在x_0处可微，此时$g(x_0)\Delta x$被称为**线性主部**。所以当$|\Delta x|$足够小的时候，干脆就用线性主部来**代替**因变量的差分Δy，那么我们把Δx叫做**自变量的微分**，记作$\mathrm{d}x$，把$g(x_0)\Delta x$叫做**因变量的微分**，记作$\mathrm{d}y$，即：

$$\mathrm{d}y = g(x_0)\mathrm{d}x$$

很显然**可微的函数一定连续**，但**连续的函数不一定可微**。

> 例1.1-1：求$y=f(x)=x^{\frac{2}{3}}$的微分

从这里我们知道连续的函数不一定可微。

1.2 导数的定义

若函数$f(x)$在x_0处可微，则$g(x_0)$是$\Delta x \to 0$时$\frac{\Delta y}{\Delta x}$(**微商**)的极限，记作$f'(x_0)$，即：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

这时候称$f(x)$在x_0处**可导**，$f'(x_0)$为$f(x)$在x_0处的**导数**。
$f(x)$所有可导点的集合是它定义域的子集，$f'(x)$可以看作定义在这个子集上的一个新的函数，称为**导函数**，一般简称**导数**，这里的$f'(x)$与上文的$g(x)$其实是一样的，所以微分关系式可以改写为：

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

> 例1.2-1：假设$y=f(x)$在x_0处可导，求：
>
> 1. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$
> 2. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}$

> 例1.2-2：设$f(0)=0$，$f'(x)$存在，求
>
> $$\lim_{n\to\infty}[f(\frac{1}{n^2}) + f(\frac{2}{n^2}) + ... + f(\frac{n}{n^2})]$$

由上述推理我们知道，**一元函数**在某一点**可微和可导是等价的**。所以**连续不一定可导**。

1.3 单侧导数

由于

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

根据极限的定义，我们可以知道导数存在需要它的左极限：

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

和右极限：

$$f'_{+}(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

都存在且相等。我们把上面两个极限分别叫做$f(x)$在x处的**左导数**和**右导数**。

> 例1.2-2：设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，要使$F(x)$在0处可导，要满足什么条件。

注:

1. 不能用极限推导数

> 例1.2-3：构造函数$f(x)$使得$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=A\in\mathbb{R}$，但$f(x)$在$x$处:
> (a)不可导
> (b)不连续

2. h是否可以以**任何方式**趋于0

> 例1.2-4：构造函数$g(h)$使得对于一个在x_0处连续的$f(x)$，有$\lim_{g(h)\to 0}\frac{f(x+g(h))-f(x)}{g(h)}=A\in\mathbb{R}$，但$f(x)$在$x$处不一定可导

3. 导数的计算**不能直接套公式**

> 例1.2-5：设$f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，确定$\alpha$的范围，使得$f(x)$在$x=0$处连续，可导，导函数连续

4. 左导数≠导数的左极限，右导数≠导数的右极限

1.3 导数的计算和链式法则

1.3.1 基本导数

- $[C]'=0$
- $[x]'=1$
- $[x^n]'=nx^{n-1}$
- $[\sin x]'=\cos x$
- $[\cos x]'=-\sin x$
- $[\tan x]'=\sec^2 x$
- $[\cot x]'=-\csc^2 x$
- $[\sec x]'=\sec x\tan x$
- $[\csc x]'=-\csc x\cot x$
- $[\arcsin x]'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arctan x]'=\frac{1}{1+x^2}$
- $[a^x]'=a^x\ln a$
- $[e^x]'=e^x$
- $[\ln x]'=\frac{1}{x}$
- $[\log_a x]'=\frac{1}{x\ln a}$

> $[\log_x a]'=?$

1.3.2 导数的四则运算

设函数$u(x)$和$v(x)$在x_0处可导，则:

1. $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$
2. $[kv(x)]'=kv'(x)$
3. $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
4. $[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

1.3.3 链式法则

设函数$u(x)$在x_0处可导，函数$y=f(u)$在$u_0=u(x_0)$处可导，则:

$$y'=f'(u_0)u'(x)$$

可以记作:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

> 如何证明？

上述链式法则可以进行推广：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_1(f_2(\cdots f_n(x)\cdots)))=\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2}\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}f_3}\cdots\frac{\mathrm{d}f_{n-1}}{\mathrm{d}f_n}\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}$$

> 幂指函数求导：$[u(x)^{v(x)}]'=?$

一阶微分的**形式不变性**：

$$\mathrm{d}[f(g(x))]=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f'(u)\mathrm{d}u$$

1.4 反函数求导

反函数求导定理：
设函数$y=f(x)$在区间I上单调，且其反函数$x=g(y)$存在，且在区间J上单调，则：

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

或者记作：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

1.5 隐函数求导

设函数$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内具有连续偏导数，且$F(x_0,y_0)=0$，则它唯一确定了一个关系$y=f(x)$，有些时候我们可以实现**隐函数的显化**，但如果不能实现，则对方程两边求微分即可。

> 例1.5-1：求曲线$2x^2+y^2=1$在点$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$处的切线方程

参数方程求导：

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$确定，则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

> 例1.5-2：证明曲线$\rho_1=a(1+\cos\theta)$,$\rho_2=a(1-\cos\theta)$在交点处的切线互相垂直

1.6 高阶导数与高阶微分

大家肯定早就会了。

莱布尼兹公式：设$f(x)$，$g(x)$都是n阶可导函数，则：

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kf^{(k)}g^{(n-k)}$$

> 复合函数高阶导数？参数方程高阶导数？隐函数高阶导数？

> 例1.6-1：求$f(x)=x^2\ln(x+1)$在$x=1$处的n阶导数$(n\geq 3)$。

> 例1.6-2：求$f(x)=(x^2-1)^n\arctan x$在$x=1$处的n阶导数

2 微分中值定理及其应用

2.1 函数极值与费马引理

函数极值的定义：若$f(x)$在(a,b)上**有定义**，对$x_0\in(a,b)$，存在一个**邻域**$O(x_0,\delta)\subset(a,b)$使得$f(x_0)$是这个邻域里最大的，则称$f(x_0)$是一个**极大值**，$x_0$是一个**极大值点**，极小值的定义类似。

对极值的定义是**没有涉及导数**的。

费马引理：设函数$f(x)$在x_0处**可导**，且$f(x_0)$是函数的一个极值，则$f'(x_0)=0$。

> 证明?

2.2 罗尔定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$。

> 例2.2-1：设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$上可导，且$f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，求证必存在$\xi\in(0,3)$使得$f'(\xi)=0$。

> 例2.2-2：设$f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且对于(a,b)内的一切x均有$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$，求证若$f(x)$在$(a,b)$内有至少两个零点，则介于任意两个零点之间必存在$g(x)$的一个零点。

2.3 拉格朗日中值定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则存在$\xi\in(a,b)$使得:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

> 例2.3-1：设$f(x)$在$[0,1]$上可微，$f(0)=0$，$f(1)=1$，三个正数λ_i，$i=1,2,3$的和为1，证明存在互异的$x_i\in(0,1)$，$i=1,2,3$使得$\frac{\lambda_1}{f'(x_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(x_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(x_3)}=1$。

> 例2.3-2：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$f(a)=0$，$f(b)=1$，证明存在互异的$\xi,\eta\in(a,b)$使得$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$。

> 例2.3-3：设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$a>0,b>0$证明存在互异的$\xi,\eta\in(a,b)$使得:
> (1) $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$
> (2) $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$

> 例2.3-4：设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导且有界，证明存在ξ使得$f''(\xi)=0$

2.4 柯西中值定理

若$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$g'(x)\neq 0$，则存在$\xi\in(a,b)$使得:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

> 例2.4-1：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，且$f'(x)\geq 0$，证明存在$\xi,\eta\in(a,b)$使得$\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}=\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}$。

2.5 琴生不等式

若$f(x)$是区间I上的严格下凸函数，则对任意$x_i\in I$和满足$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$的$\lambda_i>0$，成立:

$$f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$$