一、正项级数

1.1 收敛/发散

收敛：部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限数 S （$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$）

- 正项级数收敛的充分必要条件是部分和数列有上界。

1.2 比较判别法

（比较判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数，若存在常数 $A > 0, N_0 \in \mathbb{N}_+$，使得 $0 \le x_n \le Ay_n, \forall n \ge N_0$，则：当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散。

- 等价于 $y_n = O(x_n)$

Tips：常用于比较的级数有：$\frac{1}{n^p}, \frac{1}{q^n}, \frac{1}{n!}$。

例题：判断或讨论下列级数的敛散性：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})$
2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{\dfrac{1}{n} : n\text{的十进制表示中不含}9\right\}$

解：1.

$$\sum n^p(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}) = \sum n^p(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})) = \sum \frac{1}{6}n^{p-3} + o(n^{p-3}).$$

因此 $p < 2$ 时级数收敛，$p \ge 2$ 时级数发散。

2.$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \sum \frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}$。因为 $\ln^2 t < t, \forall t > 0$，所以 $(\ln\ln n)^2 < \ln n$，即 $e^{(\ln\ln n)^2} < e^{\ln n} = n$。所以 $\sum \frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}} > \sum \frac{1}{n} = \infty$。故发散。

3.

$$\sum_{k\text{不含}9} \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\text{不含}9\text{，且位数为}j} \frac{1}{k} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{j-1}} \frac{8}{9} (\frac{9}{10})^{j-1} 9 \times 10^{j-1} < 8\sum_{j=1}^{\infty} (\frac{9}{10})^{j-1} = 80.$$

所以级数收敛。

1.3 Cauchy 判别法/d'Alembert判别法

（**Cauchy 判别法**）设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$，则：当 $r<1$ 时级数收敛；当 $r>1$ 时级数发散；当 $r=1$ 时判别法失效（**Note**：无法用几何级数来放缩p级数）。

- **典题**：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^n}$
  - $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p}{2^n}\right)^{1/n}=\frac{1}{2}<1.$$

    所以级数收敛。

（**d'Alembert 判别法**）设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(x_n\neq 0)$ 是正项级数，则：当 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\overline{r}<1$，级数收敛；当 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\underline{r}>1$ 时，级数发散；否则，判别法失效。

- **典题**：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$
  - $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

    所以级数收敛。

（**高斯比值判别法**）（**Note**：等价于 Raabe 判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(x_n\neq 0)$ 是正项级数，且 $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+o(\frac{1}{n}),(n\to\infty)$，则：当 $(\lambda>1)\vee(\lambda=1\wedge\mu>1)$ 时，级数收敛；当 $(\lambda<1)\vee(\lambda=1\wedge\mu<1)$ 时级数发散。

- **典题**：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$
  - $$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}\Big/\frac{n^n}{e^n n!}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$

    所以级数收敛。

1.4 积分判别法

（**积分判别法**）对于$[a,\infty]$ 上可积恒正单调递减函数 $f(x)$，反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum_{n=[a]+1}^{\infty}f(n)$ 同时收敛或同时发散于 $+\infty$。

例题：讨论级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}$ 的敛散性。其中 $p,q,r>0$。

解：

当 $p<1$ 时，因为 $\frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}>\frac{1}{n^{p+\epsilon}}$， $\quad n\to\infty,\forall\epsilon>0$，所以原级数发散；

当 $p>1$ 时，因为 $\frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}<\frac{1}{n^{p-\epsilon}}$， $\quad n\to\infty,\forall\epsilon>0$，所以原级数收敛；

因为 $\{\frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}\}$ 恒正且单调递减，所以 $\sum\frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}$ 与 $\int_3^{\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}dx$ 敛散性相同。当 $p=1$ 时，注意到

$$\int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}dx=\int_{\ln 3}^{\infty}\frac{1}{t^q(\ln t)^r}dt,$$

所以问题转化为判断 $\int_1^{\infty}\frac{1}{t^q(\ln t)^r}dt$ 的敛散性。类似上面的讨论，

当 $p=1,q<1$ 时，原级数发散；

当 $p=1,q>1$ 时，原级数收敛；

当 $p=1,q=1$ 时，再利用一次换元则问题转化为判断 $\int_{\ln\ln 3}^{\infty}\frac{1}{s}ds$ 的敛散性。因此

当 $p=1,q=1,r<1$ 时，原级数发散；

当 $p=1,q=1,r\geq 1$ 时，原级数收敛。

例题：设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$，证明：$0<p<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛。

证明：

令 $S=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\frac{a_n}{r_n^p}=\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n^p}\leq\int_{r_{n+1}}^{r_n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$；

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}<\int_0^S\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<\infty$。所以级数收敛。

二、任意项级数

2.1 收敛/绝对收敛/条件收敛

（级数的 Cauchy 收敛原理） 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得 $|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$，对一切 $n>N$ 与一切正整数 p 成立。

（条件收敛和绝对收敛） **绝对收敛**：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛；**条件收敛**：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 不收敛。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$都**收敛**；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$都**发散**。

例题：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 是否一定收敛?

解：均不一定。

- 设 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum a_n$ 收敛。但 $a_n^2 = \frac{1}{n}$，故 $\sum a_n^2$ 不收敛。
- 设

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(2k-1)^{1/3}}, & n = 3k-2, \\ -\frac{1}{2(2k)^{1/3}}, & n = 3k-1, \\ -\frac{1}{2(2k)^{1/3}}, & n = 3k. \end{cases}$$

  则 $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} < \infty$，而 $a_{3k-2}^3 = \frac{1}{2k-1}, a_{3k-1}^3 = a_{3k}^3 = -\frac{1}{16k}$。

  $\sum a_n^3 = \sum \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4} \sum \frac{1}{2k} = \sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{3}{4} \sum \frac{1}{2k} = +\infty$。

2.2 判别方法

（Leibniz 判别法）交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n (u_n > 0)$ 满足 $\{u_n\}$ 单调减少且收敛于 0，则称这样的级数称为**Leibniz级数**，其必定收敛。

- **典题**：$\sum \frac{(-1)^n}{n^p} (p > 0)$。
  - 因为 $\{\frac{1}{n^p}\}$ 单调递减收敛于 0，所以根据 Leibniz 判别法，$\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛。

    且当 $p < 1$ 时级数绝对收敛，$p \geq 1$ 时级数条件收敛。

  （**Tips**：在使用 Leibniz 判别法时，一定要注意级数必须是交错的。例如 $\sum (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ 不可使用因为 $\sin n$ 正负性未知。）

例题：判断下列级数的敛散性：

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{n^2+n}\pi\right)$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$

解：1.

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1} = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}$$

因为前者收敛而后者发散，所以原级数发散。

2.

$$\begin{aligned}
&\sum \cos\left(\sqrt{n^2+n}\pi\right) \\
=&\sum (-1)^{n-1}\sin\left(\sqrt{n^2+n}\pi-(n+\frac{1}{2})\pi\right) \\
=&\sum (-1)^{n}\sin\left(\frac{1}{4\sqrt{n^2+n}+2(2n+1)}\pi\right)
\end{aligned}$$

由 Leibniz 判别法，级数收敛。又因为

$$\sum |\cos\left(\sqrt{n^2+n}\pi\right)| = \sum \sin\left(\frac{1}{4\sqrt{n^2+n}+2(2n+1)}\pi\right),$$

且 $\frac{1}{4\sqrt{n^2+n}+2(2n+1)}\pi = \frac{\pi}{8n}+o(\frac{1}{n})$，所以级数条件收敛。

3.

$$\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}$$

对任意 n，因为 $\frac{2}{n+2}=\frac{2n}{(n+1)^2-1}\leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}\leq \frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}$，所以 $\{\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}\}$ 是一个递减序列。由 Leibniz 判别法，级数收敛。

又因为 $\sum|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}|=\sum\frac{1}{n}=\infty$，所以级数条件收敛。

若下列两个条件之一满足，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛：

（Abel 判别法）$\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

（Dirichlet 判别法）$\{a_n\}$ 单调趋于 0，$\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i\right\}$ 有界。

常用的二级结论：

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n, \sum_{n=1}^{\infty}\cos n, \sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 部分和有界；
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 在 $0<p\leq 1$ 时条件收敛，在 $p>1$ 时绝对收敛。

例题：讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^2 n}{n}$ 的敛散性。

例题：判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\pi-\arctan n)(1+\frac{1}{n})^n(-1)^n n^{-1/3}$ 的敛散性。

解：1.

$$\sum\frac{(-1)^n\sin n}{n}=\sum\frac{\sin(1+\pi)n}{n}.$$

因此级数条件收敛；

2.

$$\sum \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n} = \sum \frac{(-1)^n(1-\cos 2n)}{2n} = \frac{1}{2}\sum \frac{(-1)^n}{n} - \sum \frac{\cos(2+\pi)n}{2n}.$$

前后两个级数均条件收敛。因此原级数条件收敛。

三、函数列、函数项级数

3.1 函数列的点态收敛/一致收敛/内闭一致收敛

点态收敛

- 若 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in I$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上点态收敛于 $f(x)$。
- 若 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), \forall x \in I$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上点态收敛于 $S(x)$。

称 I 为**收敛域**，$\forall x \in I$ 为**收敛点**。

一致收敛

- 若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对任意 $n \geq N, x \in I$，都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，则称 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$。
- 若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对任意 $n \geq N, x \in I$，都有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$。

内闭一致收敛

- 若对任意闭区间 $[a,b] \subset I$，$\{f_n(x)\}$ 均在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则称 $\{f_n(x)\}$ 内闭一致收敛于 $f(x)$。
- 若对任意闭区间 $[a,b] \subset I$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则称 $\sum f_n(x)$ 内闭一致收敛于 $S(x)$。

内闭一致收敛是弱于一致收敛的：函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，但在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛。

判定函数列非一致收敛常用的等价条件

若存在点列 $\{x_n\}$ 满足 $f_n(x_n) - f(x_n) \nrightarrow 0 (n \to \infty)$,

或更一般地，存在整数列 $\{1 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots\}$ 和点列 $\{x_k\}$ 满足

$$f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \nrightarrow 0 (k \to \infty),$$

则 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f。

- **例如**：$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}, x\in(0,+\infty)$ 不一致收敛，因为 f_n 点态收敛于 0 但存在点列 $\{x_n=\frac{1}{n}\}$ 满足 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}\nrightarrow 0$。

判定函数项级数非一致收敛常用的等价条件

若存在点列 $\{x_n\}$ 满足 $S(x_n)-S_n(x_n)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_n(x_n)\nrightarrow 0(n\to\infty)$,

或更一般地，存在整数列 $\{1<n_1<\cdots<n_k<\ldots\}$ 和点列 $\{x_k\}$ 满足

$$S_{n_k}(x_k)-S(x_k)=\sum_{j=n_k+1}^{\infty}a_j(x_k)\nrightarrow 0(k\to\infty),$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ 不一致收敛于 S。

- **例如**：$S_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}, x\in(0,\infty)$ 不一致收敛，因为存在点列 $\{x_n=n\}$ 满足

$$S(x_n)-S_n(x_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n}{n^2+k^2}>\int_{n+1}^{\infty}\frac{n}{n^2+x^2}dx=\arctan\frac{x}{n}\Big|_n^{\infty}=1$$

所以 $\{S_n\}$ 不一致收敛。

注意，在判定函数项级数的（一致）收敛性时，我们一般不能（也不需要）求出和函数的具体表达。

例题：讨论函数项级数在给定区间上的收敛性：$\sum\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}, \alpha>0, x\in(0,+\infty)$。

解：对任意 $x\in[a,b]\subset(0,+\infty)$，因为

$$\sum\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}<\sum\frac{1}{n^{1+\alpha}x}\le\sum\frac{1}{n^{1+\alpha}a}<\infty,$$

所以函数列内闭一致收敛。

另一方面，令 $n_k=[k^{1/2\alpha}]-1$，$x_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$，则

$$\begin{aligned}&\sum_{j=n_k+1}^{\infty}\frac{x_k}{j^{\alpha}(1+jx_k^2)}\\&>\int_{k^{1/2\alpha}}^{\infty}\frac{1/\sqrt{k}}{x^{\alpha}(1+x/k)}dx\\&>\int_{k^{1/2\alpha}}^{\infty}\frac{1/\sqrt{k}}{x^{1+\alpha}/k}dx\\&=\sqrt{k}\int_{k^{1/2\alpha}}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\\&=\sqrt{k}(\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha})\Big|_{k^{1/2\alpha}}^{\infty}\\&=\frac{1}{\alpha}\end{aligned}.$$

即 $|S(x_k)-S_{n_k}(x_k)|\nrightarrow 0$。所以函数列不一致收敛。

3.2 一致收敛的判别方法

（Cauchy 收敛准则）若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对任意 $n, m \geq N, x \in I$，都有 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$，则称 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$。

（优级数判别法）若 $\{f_n(x)\}$ 满足 $\forall x \in I, |f_n(x)| \leq a_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛。

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$（$x \in I$）满足如下两个条件之一，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

（Abel 判别法）函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in I$ 关于 n 是单调的，且 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致有界：$|a_n(x)| \leq M, x \in D, n \in \mathbb{N}^+$；同时，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

（Dirichlet判别法）函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in I$ 关于 n 是单调的，且 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 0；同时，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列在 I 上一致有界：$|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| \leq M, x \in I, n \in \mathbb{N}^+$。

（Dini 定理）设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上点态收敛于 $S(x)$，如果：

- $S_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[a, b]$ 上连续；
- $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续；
- $\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调，即对任意固定的 $x \in [a, b]$，$\{S_n(x)\}$ 是单调数列；

则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$。

典题：讨论函数项级数在给定区间上的收敛性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}, p > 0, x \in [0, +\infty)$。

解：对任意 x，因为 $\sum \sin nx$ 部分和有界，且 $\{\frac{1}{n^p}\}$ 单调趋于 0，所以根据 Dirichlet 判别法可知，级数在 $[0, +\infty)$ 上收敛。

当 $p > 1$ 时，因为 $\{\sin nx\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致有界，$\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛，所以根据 Abel 判别法，$\sum \frac{\sin nx}{n^p}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛。

当 $p \leq 1$ 时，考虑 $x_n = \frac{1}{2n}$，因为

$$S_{2n}(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \frac{k}{2n}}{k^p} > \sin \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^p}.$$

当 $p < 1$ 时，$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^p} > \int_n^{2n} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_n^{2n} \to \infty$；当 $p = 1$ 时，$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \to \ln 2$。

所以 $S_{2n}(x_n)-S_n(x_n)\nrightarrow 0$。所以 $\{S_n\}$ 不一致收敛。

对任意 $[a,b]\in[0,+\infty)$，因为 $|\sum_{k=1}^n \sin nx|=|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}|\le|\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}|$，所以 $\sum\sin nx$ 在 $[a,b]$ 上一致有界。又因为 $\frac{1}{n^p}$ 单调递减且收敛于 0，所以根据 Dirichlet 判别法，$\sum\frac{\sin nx}{n^p}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。即在 $[0,+\infty)$ 上内闭一致收敛。

例题：已知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，证明函数列 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x+\frac{k}{n})$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。

证明：根据定积分的定义有 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_0^1 f(x+t)dt$。

对任意闭区间 $[a,b]$，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。即对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\forall|x-y|<\delta,|f(x)-f(y)|<\epsilon$。

取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{N}<\delta$，则对任意 $n\ge N$，有

$$\begin{aligned}&\left|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)dt\right|\\=&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x+\frac{k}{n})-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x+t)dt\right|\\=&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x+\frac{k}{n})-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_k)\right|\\\le&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f(x+\frac{k}{n})-f(\xi_k)\right|\end{aligned}$$

其中 $\xi_k\in(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})$（积分中值定理）。

因为对每个 $k=1,2,\dots,n$ 均有 $0<(x+\frac{k}{n})-\xi_k<\delta$，所以 $|f(x+\frac{k}{n})-f(\xi_k)|<\epsilon$。所以 $|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)dt|<\frac{1}{n}\cdot n\epsilon=\epsilon$。所以 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。

例题（23 期末）：已知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有连续的导函数，函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $f_n(x)=n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$，证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛。

证明：因为

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}=f'(x),$$

所以 $f_n(x)$ 点态收敛于 $f'(x)$。

对任意闭区间 $[a,b]\subset(0,1)$，因为 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。即对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\forall|x-y|<\delta,|f(x)-f(y)|<\epsilon$。

取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{N}<\delta$，则对任意 $n\ge N$，有

$$
\begin{aligned}
&|f_n(x)-f'(x)| \\
=&\left|n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))-f'(x)\right| \\
=&\left|n(f(x)+\frac{1}{n}f'(\xi_n)-f(x))-f'(x)\right| \\
=&|f'(\xi_n)-f'(x)|
\end{aligned}
$$

其中 $\xi_n \in (x, x+\frac{1}{n})$（泰勒展开的拉格朗日余项）。

因为 $\xi_n - x < \frac{1}{n} < \delta$，所以 $|f'(\xi_n)-f'(x)| < \epsilon$。所以 $|f_n(x)-f'(x)| < \epsilon$。所以 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛。

3.3 一致收敛函数项级数的逐项可微和逐项可积

（函数列极限的连续性）函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续。

（函数列极限的可微性）设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足：（1）$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$。则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)$。（求导和求和次序可交换）

（函数列极限的可积性）设对每个 n，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\displaystyle\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$。(积分和求和次序可交换)

例题：证明 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在$(1,\infty)$ 上无穷次可微。

证明：$f_n^{(k)}(x)=(\frac{1}{n^x})^{(k)}=(\ln\frac{1}{n})^k\frac{1}{n^x}$，因为对任意 $a>1$，对任意 $x \ge a$，

$$
\sum\left|(\ln\frac{1}{n})^k\frac{1}{n^x}\right| < \sum\frac{(\ln n)^k}{n^a} < \infty.
$$

所以对任意 k，$\sum f_n^{(k)}(x)$ 在 $(1,\infty)$ 上内闭一致收敛。所以 $S(x)=\sum\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,\infty)$ 上无穷次可微。

四、幂级数

4.1 麦克劳林级数

（幂级数） $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$

（$x_0 = 0 \to$**麦克劳林级数）** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

（幂级数的收敛域和收敛半径）幂级数在以 x_0 为中心的开区间上 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上绝对收敛，在开区间外发散。在区间端点处的收敛性没有普遍规律，需要具体分析。R 称为幂级数的收敛半径，其满足

$$R = \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}.$$

特别地，$\infty^{-1} = 0, 0^{-1} = \infty$。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径是 0；$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ 的收敛半径是 $\frac{1}{2}$；$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k x^n$ 的收敛半径是 1；$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径是 ∞。

常见的幂级数：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots && = \sum_{n\geq 0} x^n \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots && = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots && = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots && = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots && = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots && = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots && = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots && = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

（幂级数的逐项可微性）幂级数在它的收敛域内部可以逐项可导。

（幂级数的逐项可积性）幂级数在它的收敛域中的任意闭区间上可以逐项求积分。

在计算一般函数的幂级数时，我们一般希望通过一系列**恒等变换**或**求导**、**积分**将其转化为一些基本幂级数的和差。例如：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\dots \\
\ln\left(1+x+x^2+x^3\right) &= \ln\left((1+x)(1+x^2)\right)=\ln(1+x)+\ln\left(1+x^2\right)=\dots \\
\sin x\sin 2x &= \frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)=\dots \\
\arctan\frac{1-x}{1+x} &= \arctan 1-\arctan x=\dots \\
\frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{d}{dx}\frac{-1}{1+x}=\frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0}(-1)^{n-1}x^n=\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)x^n.
\end{aligned}
$$

例题： 求下列函数的麦克劳林级数：$x^2\arctan x^2-\ln\sqrt{1+x^4}$。

解： 令 $y=x^2$，则 $x^2\arctan x^2-\ln\sqrt{1+x^4}=y\arctan y-\ln\sqrt{1+y^2}:=g(y)$。

因为 $g'(y)=\arctan y+\frac{y}{1+y^2}-\frac{y}{1+y^2}=\arctan y$，而由 arctan 的麦克劳林级数得

$$
g'(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}
$$

因此由幂级数的逐项可积性有

$$
g(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}y^{2n}}{2n(2n-1)}.
$$

即

$$
f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n}}{2n(2n-1)}.
$$

4.2 利用幂级数展开做级数求和

根据一些常见函数的幂级数展开，我们可以构造幂级数把级数求和转化为幂级数在对应点的点值。

典题： $\sum \frac{n^2}{2^n}$

例题： 求下列级数的和：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

解： 1.构造级数 $f(x)=\sum n^2x^n$，则 $S=f(\frac{1}{2})$。因为

$$
\begin{aligned}
f(x)=\sum n^2x^n &= \sum(n+2)(n+1)x^n-\sum 3(n+1)x^n+\sum x^n \\
&= (\sum x^n)''-3(\sum x^n)'+(\sum x^n) \\
&= \frac{2}{(1-x)^3}-\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}
\end{aligned}
$$

故 $S=f(\frac{1}{2})=16-12+2=6$。

2.因为

$$S=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}-2\sum\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}:=S_1-S_2,$$

而

$$S_1=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2,$$

构造级数 $f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n+1}$，则比较 $f(x)$ 与 $\arctan x$ 的麦克劳林级数可得 $f(x)=x-\arctan x$，因此 $S_2=f(1)=1-\frac{\pi}{4}$。

综上，$S=S_1-S_2=\ln 2-1+\frac{\pi}{4}$。

3.因为

$$S=\frac{1}{2}\left(\sum\frac{1}{n!}+\sum\frac{(-1)^n}{n!}\right):=\frac{1}{2}(S_1+S_2),$$

则 $S_1=e^x\Big|_{x=1}=e, S_2=e^x\Big|_{x=-1}=e^{-1}$。故 $S=\frac{e+e^{-1}}{2}$。

4.构造级数 $f(x)=\sum\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$，则

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\\
&=\int\sum(-1)^n x^{3n}dx\\
&=\int\frac{1}{1+x^3}dx\\
&=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx\\
&=\frac{1}{3}(\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}).
\end{aligned}$$

因此

$$S=f(1)=\frac{1}{3}(\ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}).$$

五、Fourier 级数

5.1 Fourier 级数的定义

（Fourier 级数）设 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{T}.$$

其中

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}dx, b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}dx.$$

特别地，只含有正弦项的级数称为**正弦级数**，只含有余弦项的级数称为**余弦级数**。

如果 f 本身并不是周期函数，那么它的傅里叶级数相当于取出积分区间的这一段并将其周期延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上，且周期和积分区间相同。f 的正弦级数/余弦级数则相当于将其奇延拓/偶延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上，如果原函数的积分区间是 $[0,a]$，则延拓后的周期为 $2a$。

5.2 收敛性

（Riemann 引理） 设 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi(x)\sin nxdx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi(x)\cos nxdx = 0.$$

进而可得对任意傅里叶级数，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

（Fourier 级数在间断点处的连续性） 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且满足以下两个条件之一，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$。

1. **（Dirichlet-Jordan）** $f(x)$ 在 x 的某邻域 $N(x,\delta)$ 上分段单调有界
2. **（Dini-Lipschitz）** $f(x)$ 在 x 的某邻域满足指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 Holder 条件，即存在 $L>0, \alpha\in(0,1], \delta>0$ 使得

$$|f(x+u)-f(x+)|<Lu^\alpha, |f(x-u)-f(x-)|<Lu^\alpha, 0<u<\delta$$

上面的条件难以直观感受。事实上，我们常见到的函数都是连续函数和仅有有限个第一类间断点的函数。它们一定满足上述性质。

典题：已知

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0\le x<\frac{1}{2}, \\ x^2, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

的傅里叶级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$，$S(x)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$ 的和函数，求 $S(\frac{7}{2})$ 的值。

和函数的周期为 2 且为奇函数。所以

$$S(\frac{7}{2}) = S(-\frac{1}{2}) = -S(\frac{1}{2}) = -(S(\frac{1}{2}_-)+S(\frac{1}{2}_+)) = -(0+\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8}.$$

5.3 逐项可微和逐项可积

（**Fourier 级数的逐项可积性**）设 f 在 $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$ 上可积，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t&=\int_a^b\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t\\&=\frac{a_0}{2}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nt-b_n\cos nt}{n}\Big|_a^b.\end{aligned}$$

进而可得，$\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛（代入 $t=0$）。这可以证明一些级数不可能成为某个可积函数的 Fourier 级数。

- **例如**：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 不是 Fourier 级数。

（**Fourier 级数的逐项可微性**）设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且除有限个点外可导，则

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}n(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)$$

5.4 其他性质

（**标准正交基的定义**）设函数列 $\{\phi_n(x)\}$ 定义在 $[a,b]$ 上，且满足如下单位正交性：

$$\int_a^b\phi_m(x)\phi_n(x)=\begin{cases}0,& m\neq n,\\1,& m=n,\end{cases}$$

则称 $\{\phi_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上可积函数类的一组标准正交基。

例题：设 $\{\phi_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上可积函数类的一组标准正交基，f 在 $[a,b]$ 可积，且 $a_n=\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x$，求证：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$。

证明：记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\phi_k(x)$。

$$\begin{aligned}&\int_a^b(f(x)-S_n(x))^2dx\\=&\int_a^b\left(f^2(x)-2f(x)S_n(x)+S_n^2(x)\right)dx\\=&\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)S_n(x)dx+\int_a^b S_n^2(x)dx.\end{aligned}$$

因为

$$\int_a^b S_n^2(x)dx=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_ja_k\int_a^b\phi_j(x)\phi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\int_a^b\phi_k^2(x)dx=\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

而

$$\int_a^b f(x)S_n(x)dx=\sum_{k=1}^{n}a_k\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

所以

$$\int_a^b (f(x)-S_n(x))^2dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0.$$

对 n 取极限即得结论。

（三角函数的正交性）在 $[0,2\pi]$ 上,

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots\}$$

是一组标准正交基。

（Fourier 级数的最佳平方逼近性质）设 $T_m = \mathrm{span}\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos mx, \sin mx\}$，则 f 在 T_m 上的最佳平方逼近为

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

即对任意的 $g \in T_m, \|f-g\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-g(t))^2\mathrm{d}t \geq \|f-\hat{f}\|^2$，且逼近的余项为 $\|f-\hat{f}\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2+b_n^2)\right] \geq 0$。

注：最佳平方逼近性质对任意正交基都有效。即，将 T_m 换成其他正交基结论仍然成立。

（Parseval 恒等式）设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积，则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

例题：利用 $f(x)=x^2$ 的展开式求 $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$。

解：考虑 $f(x)=x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的展开式。因为 $f(x)$ 为偶函数，所以展开式是余弦级数。

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2}{3}\pi^2, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nxdx = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

因此 $f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$。

代入 $x=\pi$ 可得 $\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{n^2}$，因此 $\sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。

再由 Parseval 恒等式得

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n^2 = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^\infty \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4dx = \frac{2}{5}\pi^4.$$

因此 $\sum\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$。

例题：求函数 $f(x)=\cos\alpha x, x\in(-\pi,\pi), 0<\alpha<1$ 的傅里叶级数，进而证明：

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}.$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x dx=\frac{2}{\alpha\pi}\sin\alpha\pi,$$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos nx dx\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-\alpha)x-\cos(n+\alpha)x dx\\=&\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n-\alpha)\pi}{n-\alpha}-\frac{\sin(n+\alpha)\pi}{n+\alpha}\right)\\=&\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}\sin\alpha\pi}{n-\alpha}-\frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{n+\alpha}\right)\\=&\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\sin\alpha\pi.\end{aligned}$$

因此

$$\cos\alpha x=\frac{1}{\alpha\pi}\sin\alpha\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\sin\alpha\pi\cos nx.$$

代入 $x=0$ 得

$$1=\frac{1}{\alpha\pi}\sin\alpha\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\sin\alpha\pi.$$

化简可得待证结论。

习题

1. 判断下列正项级数的敛散性
   - $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
   - $\sum (\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})})^{\frac{1}{n}}$
   - $\sum \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$
2. 设 $\{a_n\}$ 有界单调递增，则 $\sum(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 是否一定收敛?
3. 设 $\sum a_n^2$ 和 $\sum b_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum a_n b_n$ 绝对收敛。
4. 判断或讨论下列变号级数的敛散性
   - $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$
   - $\sum \sin \frac{n^3}{n^2+1}\pi$
5. 设 $\sum a_n$ 收敛，$\sum(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛，证明级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。
6. 设级数 $\sum a_n$ 的部分和序列 S_n 有界，级数 $\sum(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛，$\lim b_n=0$，证明级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。
7. 判断下列函数列在给定区间上是否一致收敛/内闭一致收敛。
   - $f_n(x)=(1-x)x^n, x\in[0,1]$
   - $f_n(x)=nxe^{-nx^2}, x\in\mathbb{R}$
8. 判断下列函数项级数在给定区间上是否一致收敛/内闭一致收敛。
   - $\sum \frac{n}{1+n^3x}$
   - $\sum \arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$
   - $\sum \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$
9. 证明函数 $f(x)=\sum \sin nxe^{-nx}$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微。
10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(1)=0$，证明函数列 $x^n f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。
11. 求下列级数的收敛域。
    - $\sum(1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-2)^n$
    - $\sum \frac{x^n}{2^{n^2}}$
    - $\sum \frac{x^{n^2}}{2^n}$
    - $\sum(\sin\frac{1}{3n})(x^2+x+1)^n$
12. 求下列函数的麦克劳林展开
    - $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
    - $\arctan\frac{2(1-x)}{1+4x}$
13. 求下列级数的和
    - $\sum \frac{(-1)^n}{2^n n!}$
    - $\sum \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$
14. 求下列周期为 2π 的函数的傅里叶级数

- $f(x) = |x|, -\pi \le x < \pi$
- $f(x) = x\cos x, -\pi \le x < \pi$

15. 已知

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

记 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，求 $S(0), S(\frac{1}{2})$。

16. （23 期末）f 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数。在 $[-\pi, \pi]$ 上有一个划分 $T: -\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \pi$，若在每一个闭区间 $[x_{n-1}, x_n]$ 上 $g(x)$ 都是线性函数，则称 $g(x)$ 是分段线性函数。
    - 证明：对任意 ϵ，存在 $\mathbb{R}$ 上分段线性函数 $g(x)$ 使得 $\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$；
    - $a_0, a_n, b_n (n \ge 1)$ 都是 $g(x)$ 的傅里叶系数，证明：$\exists L > 0,\ \text{s.t.}\ \forall n \in \mathbb{N}, |n^2 a_n| < L, |n^2 b_n| < L$。
    - 记 $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$
        - 证明：$\forall x \in [-\pi, \pi], \lim_{n\to\infty} S_n(x) = g(x)$
        - 证明：$\forall n \in \mathbb{N}, |\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))| < \frac{2L}{n}$
        - 证明：$S_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $g(x)$。
    - 对 $f(x)$ 而言，证明存在 $P(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx))$ 使得 $\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - P(x)| < \epsilon$

习题答案

Problem 1

判断下列正项级数的敛散性

- $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
- $\sum (\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})})^{\frac{1}{n}}$
- $\sum \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

解：

（1）因为 $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}} < e^{\ln(\ln n)} = \ln n, \quad n \to \infty$，所以

$$\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} > \sum \frac{1}{n \ln n} = \infty.$$

（2）

$$(\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = (\frac{1}{\ln n + O(1)})^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\ln n}, \quad n \to \infty$$

所以

$$\sum (\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} > \sum \frac{1}{\ln n} > \sum \frac{1}{n} = \infty.$$

（3）因为

$$\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 2}} < \frac{1}{e^{2\ln n}} = \frac{1}{n^2}, \quad n \to \infty,$$

所以

$$\sum \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Problem 2

设 $\{a_n\}$ 有界单调递增，则 $\sum(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}})$ 是否一定收敛?

解：一定收敛。因为

$$\sum(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}) = \sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} < \sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_1} = 1 - \frac{\lim a_n}{a_1} < \infty.$$

Problem 3

设 $\sum a_n^2$ 和 $\sum b_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum a_n b_n$ 绝对收敛。

证明：

$$\sum |a_n b_n| \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \leq \frac{1}{4}(\sum a_n^2 + \sum b_n^2).$$

Problem 4

判断或讨论下列变号级数的敛散性

- $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$
- $\sum \sin \frac{n^3}{n^2+1}\pi$

解：

（1）

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} + \frac{1}{2n^{2p}} + o(\frac{1}{n^{2p}}).$$

当 $p > 1$ 时，因为

$$\sum |\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)| = \sum(\frac{1}{n^p} + o(\frac{1}{n^p})) < \infty,$$

所以级数绝对收敛；

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时，因为

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \sum \frac{(-1)^n}{n^p} + \sum \frac{1}{n^{2p}} + \sum o(\frac{1}{n^{2p}}) < \infty,$$

所以级数条件收敛；

当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时，因为 $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ 发散，所以级数发散。

（2）

$$\begin{aligned} & \sum \sin \frac{n^3}{n^2+1}\pi \\ = & \sum \sin\left(n\pi - \frac{n}{n^2+1}\pi\right) \\ = & \sum (-1)^{n-1} \sin \frac{n}{n^2+1}\pi \\ = & \sum (-1)^{n-1} (\frac{n}{n^2+1}\pi + o(\frac{1}{n})) \end{aligned}$$

故级数条件收敛。

Problem 5

设 $\sum a_n$ 收敛，$\sum(b_n - b_{n+1})$ 绝对收敛，证明级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。

证明：设 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$，因为 $\sum a_n$ 收敛，所以存在 $M<\infty$ 使 $|S_n|\le M$；因为 $\sum(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛，所以存在 $M'<\infty$ 使 $\sum_{k=1}^n |b_{k+1}-b_k|\le M'$ 且 $|b_n|\le M'$。

由 Cauchy 收敛准则，对任意 $\epsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n,m>N$ 均有

$$|S_m-S_n|<\epsilon,\sum_{k=n}^m |b_{k+1}-b_k|<\epsilon.$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=n+1}^m a_kb_k\right|\\ =&\left|b_mS_m-b_nS_n+\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k)S_k\right|\\ \le&|b_m(S_m-S_n)|+|(b_m-b_n)S_n|+\sum_{k=n}^{m-1}|b_{k+1}-b_k||S_k|\\ \le&(M+M')\epsilon+M\sum_{k=1}^{n-1}|b_{k+1}-b_k|\\ \le&(2M+M')\epsilon.\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性和 Cauchy 收敛准则知 $\sum a_nb_n$ 收敛。

Problem 6

设级数 $\sum a_n$ 的部分和序列 S_n 有界，级数 $\sum(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛，$\lim b_n=0$，证明级数 $\sum a_nb_n$ 收敛。

证明：设 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$，因为 $\sum a_n$ 部分和有界，所以存在 $M<\infty$ 使 $|S_n|\le M$。

由 Cauchy 收敛准则，对任意 $\epsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n,m>N$ 均有

$$|b_n|<\epsilon,\sum_{k=n}^m |b_{k+1}-b_k|<\epsilon.$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=n+1}^m a_kb_k\right|\\ =&\left|b_mS_m-b_nS_n+\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k)S_k\right|\\ \le&|b_m||S_m|+|b_n||S_n|+\sum_{k=n}^{m-1}|b_{k+1}-b_k||S_k|\\ \le&2M\epsilon+M\sum_{k=n}^{n-1}|b_{k+1}-b_k|\\ \le&3M\epsilon.\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性和 Cauchy 收敛准则知 $\sum a_nb_n$ 收敛。

Problem 7

判断下列函数列在给定区间上是否一致收敛/内闭一致收敛。

- $f_n(x) = (1-x)x^n, x \in [0,1]$
- $f_n(x) = nxe^{-nx^2}, x \in \mathbb{R}$

解：（1）对任意 $x \in [0,1]$，$f_n(x) \to 0, \quad n \to \infty$。

对任意 $\epsilon > 0$，令 $N = \max\{\frac{1}{\epsilon^2}, \log^2 \frac{1}{\epsilon}\}$，则

对任意 $n > N, x > 1 - \frac{1}{\sqrt{N}}$，$(1-x)x^n < 1-x < \frac{1}{\sqrt{N}} < \epsilon$；

对任意 $x \le 1 - \frac{1}{\sqrt{N}}$，$(1-x)x^n < (1-\frac{1}{\sqrt{N}})^n < (\frac{1}{e})^{\sqrt{N}} < \epsilon$。

所以 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 0。

（2）对任意 $x \in \mathbb{R}$，$f_n(x) \to 0, \quad n \to \infty$。

令 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $f_n(x_n) = \sqrt{n}e^{-1} \nrightarrow 0$。因此 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛。

对任意包含 0 的闭区间，$\{f_n(x)\}$ 在该闭区间上都不一致收敛。因此 $\{f_n(x)\}$ 不内闭一致收敛。

Problem 8

判断下列函数项级数在给定区间上是否一致收敛/内闭一致收敛。

- $\sum \frac{n}{1+n^3x}, \quad x \in (0,+\infty)$
- $\sum \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}, \quad x \in (0,+\infty)$
- $\sum \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}, \quad x \in (0,1)$

解：（1）对任意 $x \in (0,+\infty)$，$\frac{n}{1+n^3x} = O(\frac{1}{n^2}), \quad n \to \infty$，所以 $S_n(x)$ 收敛。

令 $x_n = n^{-3}$，则 $S(x_n) - S_n(x_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{1+(k/n)^3} = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx > 0$。

所以 $S_n(x)$ 不一致收敛。

对任意闭区间 $[a,b] \subset (0,+\infty)$，因为 $\forall n, \frac{n}{1+nx^3} < \frac{n}{1+a^3n}$，而 $\sum \frac{n}{1+a^3n} < \infty$，所以由优级数判别法 $\sum \frac{n}{1+n^3x}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，故在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛。

（2）由均值不等式，

$$\forall x, \quad \arctan \frac{2x}{x^2+n^3} \le \frac{2x}{x^2+n^3} \le \frac{2x}{2xn^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

由优级数判别法，$\sum \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。

（3）对任意 $x \in (0,1)$，$\sum \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}} < \sum x^{2n} < \infty$，所以 $S_n(x)$ 收敛。

令 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$，则

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_n^{2k}}{1+x_{2n}^{2k+1}} > \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^{2k} = \frac{n}{2e^2}$$

所以 $S_n(x)$ 不一致收敛。

对任意闭区间 $[a,b]\subset(0,1)$，$\forall x\in[a,b], \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}<b^{2n}$，由优级数判别法 $\sum\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。故在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛。

Problem 9

证明函数 $f(x)=\sum\sin nxe^{-nx}$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微。

证明：令 $f_n(x)=\sin nxe^{-nx}$，则

$$f_n(x)=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}e^{-nx}=\frac{e^{-(1-i)nx}-e^{-(1+i)nx}}{2i}.$$

所以有

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{(-(1-i))^k e^{-(1-i)nx}-(-(1+i))^k e^{-(1+i)nx}}{2i}.$$

所以对任意 $[a,b]\subset\mathbb{R}$，有

$$|f_n^{(k)}(x)|\leq\frac{|1-i|^k e^{-nx}+|1+i|^k e^{-nx}}{|2i|}\leq 2^{\frac{k}{2}}e^{-an}.$$

因为 $\sum 2^{\frac{k}{2}}e^{-an}$ 收敛，所以由优级数判别法知 $\{f_n^{(k)}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。

所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微。

Problem 10

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(1)=0$，证明函数列 $x^n f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

证明：对任意 $x\in[0,1]$，$x^n f(x)\to 0,\quad n\to\infty$。

对任意 $\epsilon>0$，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以存在 $\delta>0$ 使得 $\forall x>1-\delta, |f(x)|<\epsilon$。

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以由极值定理 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上存在最大值 $M<\infty$。

取 $N=\lfloor\log_{1-\delta}\frac{\epsilon}{M}\rfloor+1$，则对任意 $n>N$，

对 $x>1-\delta$，$|x^n f(x)|<|f(x)|<\epsilon$；

对 $x\leq 1-\delta$，$|x^n f(x)|<M(1-\delta)^n<\epsilon$。

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

Problem 11

求下列级数的收敛域。

- $\sum(1+\frac{1}{n})^{n^2}(x-2)^n$
- $\sum\frac{x^n}{2^{n^2}}$
- $\sum\frac{x^{n^2}}{2^n}$

- $\sum(\sin\frac{1}{3n})(x^2+x+1)^n$

解：（1）

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=e.$$

所以幂级数的收敛半径为 e^{-1}。又因为

$$(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e})^n=(e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1})^n=(e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})})^n=e^{-\frac{1}{2}}+o(1),$$

所以端点处均不收敛。即收敛域为 $(2-e^{-1},2+e^{-1})$。

（2）

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2^{n^2}})^{\frac{1}{n}}=0.$$

所以幂级数的收敛半径为 ∞，收敛域为 $\mathbb{R}$。

（3）

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{n^2}}=1.$$

所以幂级数的收敛半径为 1。又因为

$$\sum\frac{1}{2^n}=1,\sum\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}=\sum\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3},$$

所以收敛域为 $[-1,1]$。

（4）

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{3n})^{\frac{1}{n}}=1.$$

所以幂级数的收敛半径为 1。又因为

$$\sin\frac{1}{3n}=\frac{1}{3n}+o(\frac{1}{n}),$$

所以幂级数 $\sum\sin\frac{1}{3n}y^n$ 的收敛域为 $y\in[-1,1)$。令 $x^2+x+1\in[-1,1)$ 得 $x\in(-1,0)$。

Problem 12

求下列函数的麦克劳林展开

- $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- $\arctan\frac{2(1-x)}{1+4x}$

（1）

$$
\begin{aligned}
&\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\\
=&\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))\\
=&\frac{1}{2}(\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum\frac{1}{n}x^n)\\
=&\sum\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\arctan\frac{2(1-x)}{1+4x}\\
=&\arctan 2-\arctan 2x\\
=&\arctan 2-\sum\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}
$$

Problem 13

求下列级数的和

- $\sum\frac{(-1)^n}{2^n n!}$
- $\sum\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$

解：（1）

$$\sum\frac{(-1)^n}{2^n n!}=e^x\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

（2）构造幂级数 $f(x)=\sum\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$，则

$$f'(x)=\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}=e^{-x^2}.$$

所以 $\sum\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}=f(1)=\int_0^1 e^{-x^2}dx.$

Problem 14

求下列周期为 2π 的函数的傅里叶级数

- $f(x)=|x|,-\pi\le x<\pi$
- $f(x)=x\cos x,-\pi\le x<\pi$

解：（1）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\pi,a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx=-\frac{4}{\pi n^2}.$$

所以 $f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$。

（2）

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\sin nxdx=(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}.$$

所以 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin nx$。

Problem 15

已知

$$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ 0, & \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$$

记 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx, S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，求 $S(0),S(\frac{1}{2})$。

解：$S(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓的 2 倍。因此 $S(0)=2f(0)=0,S(\frac{1}{2})=2(\frac{f(\frac{1}{2}_+)+f(\frac{1}{2}_-)}{2})=1$。

Problem 16

f 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数。在 $[-\pi,\pi]$ 上有一个划分 $T:-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_m=\pi$，若在每一个闭区间 $[x_{n-1},x_n]$ 上 $g(x)$ 都是线性函数，则称 $g(x)$ 是分段线性函数。

- 证明：对任意 ϵ，存在 $\mathbb{R}$ 上的分段线性函数 $g(x)$ 使得 $\max_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)-g(x)|<\frac{\epsilon}{2}$；
- $a_0,a_n,b_n(n\ge 1)$ 都是 $g(x)$ 的傅里叶系数，证明：$\exists L>0,\ \text{s.t.}\ \forall n\in\mathbb{N},|n^2a_n|<L,|n^2b_n|<L$。
- 记 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$
    - 证明：$\forall x\in[-\pi,\pi],\lim_{n\to\infty}S_n(x)=g(x)$
    - 证明：$\forall n\in\mathbb{N},|\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))|<\frac{2L}{n}$
    - 证明：$S_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $g(x)$。
- 对 $f(x)$ 而言，证明存在 $P(x)=A_0+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx))$ 使得 $\max_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)-P(x)|<\epsilon$

证明：（1）对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $\forall x_1,x_2\in[-\pi,\pi]$，若 $|x_1-x_2|<\delta$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\epsilon}{2}$。取 $N=\lfloor\frac{2\pi}{\delta}\rfloor+1$，令 $x_n=x_0+\frac{2\pi}{N}$，令

$$g(x)=f(x_{n-1})+\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}(f(x_n)-f(x_{n-1})),\forall x\in[x_{n-1},x_n]$$

则 $g(x)$ 是线性函数且 $|f(x)-g(x)|<\frac{\epsilon}{2}$。

（2）根据傅里叶系数的定义得

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nxdx\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(\alpha_kx+\beta_k)\cos nxdx\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k(\frac{1}{n}x\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx)+\beta_k\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k(\cos nx_{k+1}-\cos nx_k).\end{aligned}$$

所以 $|n^2a_n|=|\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k(\cos nx_{k+1}-\cos nx_k)|\le 2\sum_{k=0}^{N-1}|\alpha_k|$。

同理可证 $|n^2 b_n| \le 2\sum_{k=0}^{N-1}|\alpha_k|$。因此取 $L = 2\sum_{k=0}^{N-1}|\alpha_k|$ 即可。

（3）$S_n(x)$ 是连续函数 $g(x)$ 的傅里叶级数。由傅里叶级数的收敛条件，$S_n(x) \to g(x)$。

因为 $|a_n| < \frac{L}{n^2}, |b_n| < \frac{L}{n^2}$，所以

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)| \\
\le &\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \\
\le &2L\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\
\le &2L\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}dx \\
= &\frac{2L}{n}
\end{aligned}
$$

所以对任意 x 均有 $|g(x) - S_n(x)| < \frac{2L}{n}$，故 $S_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$。

（4）由 (1) 知存在分段线性函数 $g(x)$ 满足 $|f(x) - g(x)| < \epsilon$；由（3）取 $N > \frac{4L}{\epsilon}$ 可知存在函数 $P(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$ 满足 $|g(x) - P(x)| < \epsilon$。结合二者可得 $|f(x) - P(x)| < \epsilon$。