多元函数微分学

春夏学期辅学计划

May 7, 2025

1 Euclid空间上的基本定理

1.1 $\mathbb{R}^n$ 中的点集

定义1.1 (欧氏空间). 定义了内积的n维向量空间称为n维欧氏空间（记为$\mathbb{R}^n$）；$x \in \mathbb{R}^n$称为$\mathbb{R}^n$中的点或向量。设$x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$，$y = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，内积定义为：

$$\langle x, y \rangle = x^\top y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

内积的性质：

(1) 正定性：$\langle x, x \rangle \geq 0$，等号成立当且仅当$x = 0$；

(2) 对称性：$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$；

(3) 线性性：$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$；

(4) 分配律：$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$。

定义1.2 (范数与距离). 向量x的欧几里得范数：

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

两点$x, y \in \mathbb{R}^n$之间的距离：

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

点集$E \subseteq \mathbb{R}^n$的直径：
$$d(E) = \sup_{x,y \in E} \rho(x,y)$$
满足以下不等式：
$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad \textit{(Cauchy-Schwarz)}$$
$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad (\text{三角不等式})$$

定义1.3 (邻域)**.** 点$x_0 \in \mathbb{R}^n$的δ邻域：
$$U(x_0;\delta) = \{x \mid \rho(x,x_0) < \delta\} \quad (\text{球形邻域})$$
或
$$\{x \mid |x_i - x_{0,i}| < \delta,\ i = 1,\dots,n\} \quad (\text{方形邻域})$$
空心邻域记为$U^\circ(x_0;\delta) = U(x_0;\delta) \setminus \{x_0\}$。

定理1.1. 设点$x_0 \in \mathbb{R}^n$与点集$E \subseteq \mathbb{R}^n$：

- x_0是E的内点 $\iff$ $\exists \delta > 0$使$U(x_0;\delta) \subseteq E$；
- x_0是E的外点 $\iff$ $\exists \delta > 0$使$U(x_0;\delta) \cap E = \varnothing$；
- x_0是E的界点 $\iff$ $\forall \delta > 0$，$U(x_0;\delta)$同时包含E与E^c的点。

记法：$\operatorname{int} E$为内部，∂E为边界。

1.2 $\mathbb{R}^n$ 的完备性

定理1.2 (收敛准则)**.** 点列$\{P_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$收敛当且仅当其为*Cauchy*列：
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}^+,\ \forall k > K,\ \forall q \in \mathbb{N}^+,\ \rho(P_k, P_{k+q}) < \varepsilon$$

定理1.3 (聚点定理)**.** 有界无穷点集$E \subseteq \mathbb{R}^n$必有聚点。

推论1.3.1 (致密性定理)**.** 有界点列$\{x_k\}$必有收敛子列$\{x_{k_j}\}$。

定理1.4 (有限覆盖定理)**.** 设$E \subseteq \mathbb{R}^n$为有界闭集，$\Delta = \{\Delta_\alpha\}$为一族开集覆盖$E$，则存在有限子覆盖：
$$\exists \Delta_1, \dots, \Delta_m \in \Delta,\ E \subseteq \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$$

练习1.1. （*p118*课本习题*4*改编）设D 为$\mathbb{R}^n$ 上的非空子集，定义$\mathbb{R}^n$ 上的函数$d(x,D)$ 为

$$d(x,D)=\inf_{y\in D}\|x-y\|$$

称为x 到D 的距离。证明:

(1) 当且仅当$x\in\overline{D}$ 时，$d(x,D)=0$;

(2) 若$\varnothing\neq D\subset F\subset\mathbb{R}^n$，则$d(x,F)\leq d(y,D)$;

(3) $\overline{D}=\overline{F}\subset\mathbb{R}^n\Leftrightarrow d(x,D)=d(x,F)$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$

2 多元函数的极限和连续

2.1 多元函数的极限

定义2.1. 设$D \subseteq \mathbb{R}^n$，映射$f: D \to \mathbb{R}$称为n元函数，记为:

$$z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{x} \in D$$

特别地，二元函数$z = f(x, y)$，$(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$。

2.2 累次极限和重极限

定义2.2 (重极限)**.** 设$\boldsymbol{x}_0$是D的聚点，若$\exists A \in \mathbb{R}$满足:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in D \cap U^\circ(\boldsymbol{x}_0; \delta),\ |f(\boldsymbol{x}) - A| < \varepsilon$$

则称$\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A$。

定义2.3 (累次极限)**.** 设$E_x, E_y \subseteq \mathbb{R}$，定义:

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = L \iff \begin{cases} \forall y \in E_y \setminus \{y_0\},\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y) \\ \lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = L \end{cases}$$

类似定义另一顺序的累次极限。

定理2.1 (极限关系)**.** 若重极限$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$与累次极限$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$均存在，则二者相等。

推论2.1.1. 当重极限与两个累次极限均存在时，三者相等。

推论2.1.2. 若两个累次极限存在但不相等，则重极限不存在。

练习2.1. 设$f(x, y)$ 在原点$\boldsymbol{O}$ 的某邻域内有定义，则下面命题不正确的是:

$A.$ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$, $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ 有可能三者恰有两个存在。

$B.$ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$, $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$, $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ 有可能三者恰有一个存在。

$C.$ 若$\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$, $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ 都存在，则它们必然相等。

$D.$ 若 $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$, $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ 都存在，则它们必然相等。

2.3 多元函数的连续性

定义2.4 (连续性)**.** 设$D \subseteq \mathbb{R}^n$为开集，$\boldsymbol{x}_0 \in D$，若

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

则称f在$\boldsymbol{x}_0$处连续。若f在D每点连续，则称$f \in C(D)$。

定理2.2 (有界闭集上连续函数的性质)**.** 设$D \subseteq \mathbb{R}^n$为有界闭集，$f \in C(D)$，则：

1. **有界性**：$\exists M > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in D,\ |f(\boldsymbol{x})| \le M$

2. **最值定理**：$\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$使得

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \inf_D f, \quad f(\boldsymbol{x}_2) = \sup_D f$$

3. **介值定理**（D道路连通时）：

$$\forall \eta \in [\min f(D), \max f(D)],\ \exists \boldsymbol{\xi} \in D,\ f(\boldsymbol{\xi}) = \eta$$

4. **一致连续**：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in D,\ \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon$$

练习2.2. 设$\mathbb{R}^m$ 是m 维实向量空间，若$\varphi(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ 满足：

(a) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(\vec{x}) \ge 0$，当且仅当$\vec{x} = \vec{0}$ 时取等；

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(\alpha\vec{x}) = |\alpha|\varphi(\vec{x})$；

(c) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) \le \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$。

则称$\varphi(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ 是$\mathbb{R}^m$ 上的范数。证明：

(1) $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^m |x_k|$是$\mathbb{R}^m$ 上的范数。

(2) $\varphi(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ 在$\mathbb{R}^m$ 上是一致连续函数。

(3) 设$\|\cdot\|$ 是$\mathbb{R}^m$ 上的任意一个范数，则$\exists M_1, M_2 > 0$，使得

$$M_1\|\vec{x}\|_1 \le \|\vec{x}\| \le M_2\|\vec{x}\|_1 \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m).$$

（*hint: p119*课本习题*6*）

(4) 已知矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和$\mathbb{R}^m$ 上的某种范数$\|\cdot\|$，证明函数$f(\vec{x}) = \|A\vec{x}\|$ 是从$\mathbb{R}^m$ 到$\mathbb{R}^m$ 的*Lipschitz* 函数，即对任意向量$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$，

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq L\|\vec{x} - \vec{y}\|,$$

其中$L > 0$ 为某个固定常数（称为*Lipschitz* 常数）（*hint:* 利用*(3)*）

练习2.3. （接习题*1.1*）设D 为$\mathbb{R}^n$ 上的非空子集，定义函数

$$d(x, D) = \inf_{y\in D} \|x - y\|$$

证明：

(4) 对任何$x, y \in \mathbb{R}^n$,有

$$|d(x, D) - d(y, D)| \leq d(x, y)$$

(5) *d(x,D)*是$x \in \mathbb{R}^n$的一致连续函数；

(6)* 若$D \subset \mathbb{R}^n$是闭集，$x \in \mathbb{R}^n$, 则有$y \in D$使得$d(x, y) = d(x, D)$.于是当$x \notin D$时，$d(x, D) > 0$.（*hint:*利用致密性定理）

3　多元函数微分学

3.1　偏导数与全微分

定义3.1 (偏导数). 设$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)某邻域有定义，若极限

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称为f在(x_0,y_0)对x的偏导数。类似定义f'_y。

定义3.2 (全微分). 若存在$A,B\in\mathbb{R}$使得

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

则称f在(x_0,y_0)可微，全微分为$dz=Adx+Bdy$。

定理3.1 (可微性条件).

1. 可微$\Rightarrow$ 连续且偏导存在

2. 偏导连续$\Rightarrow$ 可微

3. 充要条件:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-(f'_x\Delta x+f'_y\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

3.2　微分法则

定理3.2 (链式法则). 设$z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，当f可微且u,v可偏导时:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

定理3.3 (一阶微分形式不变性). 无论u,v是自变量还是中间变量，微分形式:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$$

恒成立。

练习3.1. （*24-25*数分*III*）定义二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^p\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明：

(1) 当$p>0$ 时，f 在点$(0,0)$ 处连续；

(2) 当$p>1$ 时，f 在点$(0,0)$ 处可微；

(3) 当$p>2$ 时，f 在点$(0,0)$ 处的偏导数$f_x(x,y)$ 和$f_y(x,y)$ 连续。

练习3.2. （*23-24*数分*III*）证明：若在点$P_0(x_0,\, y_0)$ 的某邻域内，f'_x、f'_y 和f''_{yx} 都存在，且f''_{yx} 在点P_0 连续，则$f''_{xy}(P_0)$也存在，且有

$$f''_{xy}(P_0)=f''_{yx}(P_0).$$

3.3 高阶微分

定义3.3 (高阶偏导). 二阶偏导数定义为：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

当混合偏导连续时，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$。

定理3.4 (高阶微分). k阶微分形式为：

$$d^k z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f$$

3.4 方向导数与梯度

定义3.4 (方向导数). 沿单位向量$\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$的方向导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \rho \boldsymbol{l}) - f(\boldsymbol{x})}{\rho}$$

当f可微时：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{l} = f'_x \cos\alpha + f'_y \cos\beta$$

定义3.5 (梯度). 梯度向量：

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

方向导数最大的方向即为梯度方向，最大值为$\|\nabla f\|$。

练习3.3. （*22-23*数分*II(H)*）设函数$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$证明：

(1) 在点(0, 0) 处沿任意方向的方向导数存在；

(2) 在点(0, 0) 处不可微。

3.5 极值理论

定理3.5 (极值必要条件)**.** 若f在P_0处可偏导且取极值，则$\nabla f(P_0)=0$。

定理3.6 (极值充分条件)**.** 设f在P_0处二阶连续可微，$\nabla f(P_0)=0$，考察$Hessian$矩阵：

$$H=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

- H正定$\Rightarrow$ 极小值
- H负定$\Rightarrow$ 极大值
- H不定$\Rightarrow$ 鞍点

练习3.4. （*24-25*数分*III*）求函数$f(x,\,y,\,z)=x^4+y^4+z^4$在约束条件$xyz=1$ 下的极值。

练习3.5. 试证：二次型$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$ 在单位球面$x^2+y^2+z^2=1$上的最大*(*小*)*值恰好是矩阵

$$\Phi=\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix}$$

的最大*(*小*)*特征值。

练习3.6. （*21-22数分III*）设$f(x)$ 为n 元函数，$x_0 \in \mathbb{R}^n$，$\delta_0 > 0$，$f(x)$ 在x_0 的δ_0 邻域$U(x_0;\delta_0)$ 上二阶连续可微，并且$\nabla f(x_0) = 0$，同时对任意单位向量$\alpha \in \mathbb{R}^n$，有

$$\alpha \cdot \nabla^2 f(x_0) > 0,$$

证明：

(1) 存在$\delta \in (0,\delta_0)$，使得

$$\big((x-x_0)\cdot\nabla\big)f(x) > 0$$

对任意的$x \in U_0(x_0;\delta)$ 成立；

(2) x_0 为$f(x)$ 的极小值点。

3.6 隐函数定理

定理3.7 (隐函数存在唯一性定理)**.** 设函数$F(x,y)$ 满足下列条件:

1. 在以(x_0,y_0) 为内点的某一区域$D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续；

2. $F(x_0,y_0) = 0$（通常称为初始条件）；

3. 在D 上存在关于y 的连续偏导数$F_y'(x,y)$；

4. $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$。

则在点(x_0,y_0) 的某邻域$U\subset D$ 内，方程$F(x,y)=0$ 唯一地确定了一个定义在某区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的函数$y=f(x)$，使得

1. $f(x_0)=y_0$，且当且仅当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$F(x,f(x))\equiv 0$;

2. $f(x)$ 在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续。

练习3.7. （*22-23*数分*II(H)*）证明方程$\sin y+\frac{e^y-e^{-y}}{2}=x$ 在$(0,0)$ 附近存在唯一确定的隐函数$y=\varphi(x)$，并求$\varphi'(x)$。

练习3.8. 证明隐函数存在唯一性定理

23-24数学分析II(H)第二次小测

1. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0) 的某邻域内有定义，则以下情形可能发生的是*()*。

   多选题*(10分)*

   A. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在，但$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 不存在。

   B. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$、$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 与$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 都存在，但至少两个不相等。

   C. $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 与$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 都存在但不相同。

   D. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，但$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 不存在。

2. 设函数$f(x,y)$ 在点$P(1,-2)$ 处连续，且满足

   $$f(x,y)=5+x-y+x^2+4(x-1)(y+2)+(y+2)^2+o\left((x-1)^2+(y+2)^2\right)\quad(x\to 1,y\to -2)$$

   则下列结论正确的有*()*。

   多选题*(10分)*

   A. $f(x,y)$在$(1,-2)$处取到极值。

   B. $f'_x(1,-2)=1$。

   C. $df|_{(1,-2)}=3dx-dy$。

   D. 曲面$z=f(x,y)$ 在$(1,-2)$处的切平面方程为$z=3x-y+4$。

3. 二元函数$z=f(x,y)=x^2+y^2-xy$ 在$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|+|y|\le 1\}$ 上的最大值为*()*。

   单选题*(10分)*

   A. $\frac{5}{4}$

   B. *1*

   C. $\frac{3}{4}$

   D. $\frac{1}{4}$

4. 设$f(x,y)=\begin{cases} y\cdot\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则下述结论不正确的有*()*。

   单选题*(10分)*

A. f在$(0,0)$处可求偏导。

B. f在$(0,0)$处可微。

C. f在$(0,0)$处连续。

D. f在$(0,0)$处不可微。

5. 设函数$z=z(x,y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 上处处存在所有连续的二阶偏导函数，且在点$(0,0)$处取极大值，则必有*()*。

单选题*(10分)*

A. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)>0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)<0$。

B. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\leq 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\leq 0$。

C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)<0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)>0$。

D. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\geq 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\geq 0$。

6. 曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\2z=xy\end{cases}$ 在点$(1,2,1)$处的切线方程为*()*。

单选题*(10分)*

A. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{3}$

B. $\begin{cases}x+2y+z=6\\x+2y-2z=3\end{cases}$

C. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{3}$

D. $\begin{cases}x+2y+z=6\\2x-y-2z=-2\end{cases}$

7. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}\cdot\tan(x^2+y^2), & (x,y)\in O((0,0),1)\backslash\{(0,0)\}\\0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则$df|_{(0,0)}=$ (　)。

单选题*(10分)*

A. $-dx-dy$

B. $dx-dy$

C. $-dx+dy$

D. $dx+dy$

8. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0) 的邻域$O\left((x_0,y_0),1\right)$ 内有定义，则下述正确的有*()*。

多选题*(10分)*

A. 若f在(x_0,y_0) 处可微，则f在(x_0,y_0) 处连续。

B. 若f在(x_0,y_0) 处可微，则f在(x_0,y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在。

C. 若f在(x_0,y_0) 处可微，且在$O\left((x_0,y_0),1\right)$ 上每点处关于x 可求偏导，则$\frac{\partial f}{\partial x}$在$(x_0,y_0)$ 处连续。

D. 若f在(x_0,y_0) 处可微，则f在(x_0,y_0) 处可求偏导。

9. 设二元函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$ 上处处可微。已知$f(1,2)=2$，$f_1'(1,2)=3$，$f_2'(1,2)=4$。令$\varphi(t)=f(t,f(t,2t))$，则$\varphi'(1)=(\quad)$。

单选题*(10分)*

A. *47*

B. *11*

C. *23*

D. 其余三个选项均不正确

10. 设$z=f(x,y)$ 在$(1,2)$处有一阶连续偏导数，且沿$\vec{u}=(3,4)$，$\vec{v}=(4,-3)$在$(1,2)$处的方向导数为$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}=18$，$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}=-1$，则$z=f(x,y)$ 在$(1,2)$处的全微分为*()*。

单选题*(10分)*

A. $dz=2dx+3dy$

B. $dz=15dx+10dy$

C. $dz=18dx-dy$

D. $dz=10dx+15dy$