多元函数积分讲义

@Zhou Xiaoling

2025 年 5 月 27 日

1 Overview

复习多元函数积分的思路，这一张思维导图就够了 (bushi，其实还有很多细节，包括题型方法)

2 重积分

可求面积定义理解：(from 贾厚玉老师的 PPT)

定义 1.1

$$m(E) = \sup m(\mathcal{Q}_E), \quad M(E) = \inf M(\mathcal{Q}_E).$$

其中$\sup, \inf$ 是关于所有满足条件（1），（2）的矩形族$\mathcal{Q}_E$取.

定义 1.2 (可求面积集, Jordan 可测)

设$E \subset \mathbb{R}^2$ 是有界集合，若E 满足

$$m(E) = M(E),$$

则称E 是可求面积的.
并称$m(E) = M(E)$ 为E 的面积，记为$\sigma(E)$.

定理 1.1

设$E \subset \mathbb{R}^2$ 是有界集合，则E 可求面积的充要条件是$\sigma(\partial E) = 0$.

$$D \text{ 可求面积} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists T \text{ s.t. } \overline{A(D,T)} - \underline{A(D,T)} < \varepsilon \iff A(\partial D) = 0$$

$$A(D) = 0 \iff \exists\text{有限多个矩形}R_1, \dots, R_m, \quad D \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i \quad \text{且} \quad \sum_{j=1}^{m} A(R_j) < \varepsilon \quad (\text{Jordan 面积})$$

命题：参数曲线满足一个零阶可导，一个一阶可导，则$A(\gamma) = 0$

推论：简单光滑曲线的面积为0

3 面积的定义

例 1：举出不可求面积的例子?

Skill：寻找面积上极限和下极限不同的图形。

4 二重积分

4.1 定义

4.1.1 前置定义（次要可跳）

设 D 为平面有界可求面积集。称

$$\Delta = \{\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n\}$$

为 D 的一个 **分割**，如果 Δ 满足：

- 每个 ΔD_k 可求面积；
- $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$ 两两无公共内点；

- $D = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta D_k$。

记 $\Delta\sigma_k$ 为 ΔD_k 的面积，$d_k = \mathrm{diam}(\Delta D_k)$，记

$$\lambda(\Delta) = \max_{1\le k\le n}(d_k)$$

4.1.2 黎曼可积定义

设 $f(x,y)$ 在有界可求面积集 D 上有定义，Δ 为 D 的一个分割。

任取 $M_k \in \Delta D_k$，作黎曼和 $\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k$。

如果存在常数 I，使得对于 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，对 D 的任意分割 Δ 以及任意选取的 M_k，当 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k - I\right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**，记为

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

4.1.3 几何定义

被积函数在 D 上形成的空间曲面 $z = f(x,y)$ 的下方、投影在平面区域 D 上的体积。

4.2 性质

- **乘积可积性**

  若 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在有界可测区域 D 上均可积，则它们的乘积 $f(x,y)g(x,y)$ 也在 D 上可积，即

  $$f, g \in L^1(D) \quad \Rightarrow \quad f\cdot g \in L^1(D).$$

- **保序性（单调性）**

  若 $f(x,y) \le g(x,y)$ 在区域 D 上成立，且两函数均可积，则

  $$\iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D g(x,y)\,dxdy.$$

- **绝对可积性**

  若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则其绝对值也可积，并满足：

  $$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

- **积分中值定理**

  若 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，且 D 的面积为 $A(D)$，则存在点 $(\xi,\eta)\in D$ 使得

  $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\cdot A(D).$$

4.3 计算

基本的二重积分公式，结合作图来理解。

4.3.1 长方形

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

4.3.2 X 型区域

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx$$

4.3.3 Y 型区域

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

4.3.4 极坐标

有如下两种情况（画个图理解）

情形一：非原点中心或一般极区域

若原点不属于D xy 平面上射线$\theta =$ 常数与D 的边界至多交于两点，
则$\Omega = \{(\theta, r) : \alpha \le \theta \le \beta,\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$
此时：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$$

适用于：两个极曲线（如两个圆或螺旋线）之间的夹层、环形区域等。

情形二：以原点为中心的极区域

若原点不属于 D，且 xy 平面上的圆 r = 常数与 D 的边界至多交于两点，
则 $\Omega = \{(r,\theta) : r_1 \le r \le r_2,\ \theta_1(r) \le \theta \le \theta_2(r)\}$
此时：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{r_1}^{r_2} r\,dr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$$

适用于：圆、扇形、半圆、螺旋线等以原点为极点的区域。

三、统一表达形式

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

其中：

- $r_1(\theta)$ 和 $r_2(\theta)$ 是在每个 θ 下的内外半径；
- $r\,dr\,d\theta$ 是极坐标下的面积微元；

4.4 例题

1. （广义均值不等式的积分形式）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $\forall x \in [a,b]$,$f(x)>0$，求证：

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx \geq (b-a)^2$$

2. X 和 Y 型区域积分变换

   (a) 计算二重积分

   $$\iint_D \frac{\sin y}{y}\,d\sigma,$$

   其中 D 由直线 $y=x$ 及抛物线 $x=y^2$ 所围成。

   $ans:\quad 1-\sin 1$

   (b) 求

   $$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{-y^2}\,dy\right)dx$$

   $ans:\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$

3. 设 $D: x^2+y^2 \leq r^2$，计算极限

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,dx\,dy$$

   $ans:\quad 1$

   $hint:$ 积分中值定理应用。

5 三重积分

5.0.1 定义

类似二重积分的定义。
可以从物理角度理解。

5.0.2 性质

- 乘积可积性
- 保序性
- 绝对可积性
- 积分中值定理

5.1 计算

本质是降维，将三重积分转化为二重或一重积分。

5.1.1 长方体

类似二维长方形，转化为二重积分。

5.1.2 投影法（先一后二）

以向 xoy 平面投影为例：
要求：侧面为平行于 z 轴的柱面。

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy$$

5.1.3 平面截割法（先二后一）

以垂直于 xoy 平面的平面截割为例

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right) dz$$

6 变量替换

注意：替换变量范围！

- 极坐标变换
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (dx, dy) = (r\,dr, d\theta)$$

- 柱面坐标变换
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (dx, dy, dz) = (r\,dr, d\theta, dz)$$

- 球面坐标变换
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad (dx, dy, dz) = \left(r^2\sin\phi\,dr, d\theta, d\phi\right)$$

7 曲线积分

Q: 为什么会引入曲线积分、曲面积分？

7.1 第一类曲线积分

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(t,y(t))\sqrt{1+[y'(t)]^2}\,dt$$

7.2 第二类曲线积分

$$\oint_{\gamma_+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma_+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

注意**方向性**。

理解：**物理类比**

计算方法：

- 有界闭区域边界
- 曲面边界
- 方法：
  - 写参数化方程
  - 观察方向
  - 代入公式

8 曲面积分

8.1 第一类曲面积分

设 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面 Σ 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

表示，其中 D 是可求面积的有界闭区域。又设 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上连续，则 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上的第一型曲面积分存在，且有

$$\iint_\Sigma f\,dS = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

其中：

$$E = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$$

并且 $\sqrt{EG-F^2} = |\vec{n}_\perp|$

或者写成如下形式：**（曲面积分转换为二重定积分）**

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\,\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv$$

$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right),\quad \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

- $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$: 切平面法向量
- 物理解释：曲面密度有一个函数，求面的质量。
- 注意：变量替换不要忘记尾项

8.1.1 总结：曲面积分三种形式

1. $z = f(x,y) \Rightarrow \vec{n}_\perp = (f_x, f_y, -1)$，即

   $$\iint_\Sigma \varphi(x,y,z)\,dS = \iint_D \varphi(x,y,f(x,y))\cdot|\vec{n}_\perp|\,dxdy$$

   其中：

   $$|\vec{n}_\perp| = \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}$$

2. 参数方程形式
3. 隐函数形式

8.2 第二类曲面积分

引入：单侧曲面、双侧曲面

- 简单光滑曲面 S 是双侧曲面
- 边界：右手螺旋、诱导定向

存在性和计算公式：设光滑曲面 Σ 满足前面的假设。再设向量函数

$$F(x,y,z) = (P,Q,R)$$

在 Σ 上连续，则 F 在 Σ 上的第二型曲面积分存在，且

$$\iint_{S_+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_\Sigma P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_D (PA+QB+RC)\,dudv.$$

上式将**曲面积分转换为二重定积分**.

或者写为：

$$\iint_{S_+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,du\,dv$$

$$(\text{闭区域边界}) = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

- 补充：三维叉乘公式

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\mathbf{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathbf{k}$$

- 补充：极坐标变换雅可比行列式

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}$$

- **好用公式：Wallis 公式**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{if } n \text{ is odd}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{if } n \text{ is even}\end{cases}$$

9 三个公式

- Green 公式
- Gauss 公式
- Stokes 公式

9.1 Green 公式

Green 公式给出了平面上有限条逐段光滑封闭曲线上的线积分与它们所包围区域上的二重积分的关系：

$$\int_{L^+}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{1}$$

这里 L^+ 表示沿 L 的正向取积分。正向指前进时 D 保持在左边的方向，当 D 为单连通区域时，即是逆时针方向；当 D 为多连通区域时，外边界为逆时针方向，内边界为顺时针方向。P,Q 要求在区域 D 内直到边界 L 上连续，并有连续偏导数。由此可得 D 的面积公式：

$$S=\iint_D dx\,dy=\int_{L^+}x\,dy=-\int_{L^+}y\,dx=\frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx. \tag{2}$$

在很多情况下，利用 Green 公式可以把封闭曲线上的线积分化为二重积分来计算。

二重积分 $\Longleftrightarrow$ 第二类曲线积分

9.1.1 一些推论

- $d(P\,dx + Q\,dy) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$
- Newton-Leibniz 公式

  $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

  (2D->1D)
- 有界闭区域，∂D 为分段光滑 $Jordan$ 曲线，则可计算 $A(D)$（三种）

9.1.2 练习

计算

$$\oint_{C^+} \frac{x\,dy - y\,dx}{4x^2 + y^2},$$

C 为以 $(1,0)$ 为圆心，以 R 为半径的圆周 $(R \neq 1)$，设 C^+ 表示其上的方向为逆时针方向。

hint: 在很多情况下，利用 Green 公式可以把封闭曲线上的线积分化为二重积分来计算。

9.2 Gause 公式（散度定理）

Gauss 公式在 $\mathbb{R}^3$ 中给出了空间区域 V 上的三重积分与边界上的曲面积分的关系。

设

1. V 为 $\mathbb{R}^3$ 内有界闭区域 (可以为多连通);
2. V 的边界是光滑或分片光滑的曲面 S;
3. $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 V 内直到边界 S 上连续且有连续偏导数,

则

$$\iint_{S_{外}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \quad \text{(A)}$$

或

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz, \quad \text{(B)}$$

其中 $S_{外}$ 表示曲面 S 的外侧 (多连通时, 洞壁上 V 的外法线自然是指向洞内), $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 S 外法线的方向余弦。

Gauss 公式常用于计算封闭曲面上的曲面积分, 有时可补一块平面, 把开口曲面变成封闭曲面使用 Gauss 公式。另外, 利用 Gauss 公式还可由函数的某些积分性质导出函数的微分性质。

利用 Gauss 公式将曲面积分化为三重积分, 由于求导, 被积函数数常能简化. 也省得逐块地计算积分。

三重积分 $\Longleftrightarrow$ 第二类曲面积分

9.2.1 散度的定义

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

9.2.2 练习

设 a, b, c 都是正数, 计算曲面积分

$$I = \iint_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dz\, dx + z^3\, dx\, dy,$$

其中 S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$, 方向朝上。

提示（底部）补一块, 再用 Gauss 公式 (补块上的积分为零)。

9.3 Stokes 公式

Stokes 公式建立了空间曲面积分与其边界上的曲线积分的关系。

设

1. S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的分片光滑曲面;

2. S 的边界是有限条段逐段光滑曲线 L;

3. 函数 P, Q, R 在曲面 S 及其附近有定义, 在 S 直至 L 上有连续的偏导数,

则

$$\int_{L^+} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_{S^+} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy, \quad \text{(A)}$$

其中 S^+ 与 L^+ 呈右手系 (即站在 S^+ 的法线上看 L^+ 为逆时针方向), $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 S^+ 的法线方向余弦。式 (A) 中的行列式约定按第一行展开。

利用 Stokes 公式, 可得到空间曲线积分与路径无关的充要条件。

推论: 设 V 是空间中按曲线连通的区域 (即 V 内任一封闭曲线, 都能在此曲线上张一光滑曲面, 使之完全位于 V 内), P, Q, R 为 V 内有连续偏导数的函数, 则以下四条件**等价**:

1. $\forall M_0, M_1 \in V$, 从 M_0 至 M_1 的线积分 $\int_{M_0}^{M_1} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ 只与 M_0, M_1 有关, 与路径无关。

2. V 内任何闭路 L 上的积分 $\oint_L P\, dx + Q\, dy + R\, dz = 0$。

3. V 内处处有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$。

4. 存在函数 $U(x, y, z)$, 使得 $dU = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ (U 称为 $P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ 的原函数, 这时 $P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ 称为恰当微分)。

二重积分 $\Longleftrightarrow$ 第二类曲线积分

9.3.1 旋度的定义

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

注：Stokes’ 公式可以看作是 Green’ s 定理在三维空间中的推广，实质上是三维向量场的**旋度**与**曲线积分**之间的关系，而 Green’ s 公式则是描述了二维向量场的**散度**与**曲线积分**之间的关系，是 Stokes’ 公式的**二维特例**。

从某种角度来看，这两个公式在本质上是**有联系**的，只是描述的**维度**不同而已。

9.3.2 练习

练习 1 计算线积分 $I = \oint_{L^+} x\,dy - y\,dx$，其中 L^+ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2 = 1 (z \geq 0)$ 与柱面 $x^2 + y^2 = x$ 的交线。从 z 轴正向往下看，L 正向取逆时针方向。

练习 2 计算曲线积分

$$I = \int_{L^+} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz,$$

其中 L^+ 是从点 $A(1, 0, 0)$ 至 $B(1, 0, 2)$ 的光滑曲线。

10 历年卷

2023-2024 春夏：

二、(32 分) 计算：

1. 求 $\displaystyle\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$;

2. 对于曲线 L: $y = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$，求 $\displaystyle\int\limits_L x\,\mathrm{d}s$;

3. 对于曲线 L: $y = \sin x$，方向为从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$，求 $\displaystyle\int\limits_L (e^x \sin y - y^2)\,\mathrm{d}x + e^x \cos y\,\mathrm{d}y$;

4. 对于圆锥 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$，方向为下侧，求 $\displaystyle\iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

以前的:

四、(32 分) 计算

1. $\iiint_V z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 为 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2\}$，$R$ 为正常数.

2. $\oint_L (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，方向为 z 轴正方向看为逆时针.

3. $\int_L e^x(1-\sin y)\mathrm{d}x-e^x(1-\cos y)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段曲线.

4. $\iint_\Sigma 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-2yz-z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$，上侧为正侧.

3.(1)求 $\displaystyle\int_L \frac{e^{2x}\ln(1+e^{2x})}{\sqrt{1+e^{2x}}}\mathrm{d}s$，设$L: y=e^x, x\in[0,1]$

(2)求 $\displaystyle\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，设$V$是$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$与$z\leqslant 0$的相交区域

(3)求 $\displaystyle\oint_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，设$L$是$|x|+|y|\leqslant 2$的边界, 并沿逆时针方向

(4)求 $\displaystyle\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, x^2+y^2+z^2=1\}$