极限与函数连续性

例 2.2

解：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N_1>0,\ \forall n>N_1,\quad |x_n-A|<\varepsilon$

当 $n>N_1$ 时，有 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{N_1}x_i + \sum\limits_{j=N_1+1}^{n}x_j\right)$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - A\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-A) + \sum_{j=N_1+1}^{n}(x_j-A)\right)\right|$$

$$\le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N_1}|x_i-A| + \sum_{j=N_1+1}^{n}|x_j-A|\right)$$

$$< \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_1}|x_i-A| + \frac{n-N_1}{n}\varepsilon$$

对这个 ε，取 $N_2>0$，使得当 $n>N_2$ 时，有 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{N_1}|x_i-A|<\varepsilon$.

最后取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - A\right| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_1}|x_i-A| + \frac{n-N_1}{n}\varepsilon < 2\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} = A.$$

例 2.3

解：$RHS = a = \frac{(1+1)^n}{2^n}a = \frac{1}{2^n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a\right)$

则 $\left|\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a_k - a\right| = \left|\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(a_k-a)\right|$

$$\le \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k|a_k-a|.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{Z}_+,\ \forall n>N_1,\quad |a_n-a|<\varepsilon$

因此当 $n>N_1$ 时，有

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k - a\right| \le \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k|a_k-a|$$

$$< \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_1}C_n^k|a_k-a| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N_1+1}^{n}C_n^k\cdot\varepsilon$$

$$< \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_1}C_n^k|a_k-a| + \varepsilon.$$

记 $M=\max\limits_{0\le k\le N_1}\{|a_k-a|\}$，则 $LHS < \frac{\sum_{k=0}^{N_1}C_n^k}{2^n}\cdot M+\varepsilon$.

注意到 $\sum_{k=0}^{N_1}C_n^k$ 实际上只选了 $n+1$ 个组合数中最小的 N_1+1 个.

因此当 $n>10N_1$ 时，有 $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_1}C_n^k < \frac{N_1+1}{n+1}$

取 $N_2\in\mathbb{Z}_+$，使得 $\frac{N_1+1}{N_2+1}M<\varepsilon$.

则 $\forall n>\max\{10N_1, N_2\}$，有 $LHS<2\varepsilon$

例题2.4.

解：A. $\{(-1)^n\}$ 发散 且有界

B. 同A.

C. 正确. 考虑逆否命题.

D. 显然错误.

例题2.5（该题背景是级数的比值/根值判别法）

解：A. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$

则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{Z}_+$, $\forall n>N$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$

即 $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon$. 取 ε 使得 $l+\varepsilon<1$

则 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$

$$= \prod_{i=N+1}^{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1$$

$$< (l+\varepsilon)^{n-N-1} \cdot \prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1$$ 注意到 $l+\varepsilon<1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

B. $\forall \varepsilon>0$, $l+\varepsilon<1$, $\exists N\in\mathbb{Z}_+$, $\forall n>N$ $|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon$.

$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon \Rightarrow 0 < a_n < (l+\varepsilon)^n$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

C. ①若 $l\in(0,1)$. 任取 $\varepsilon>0$ 使得 $l+\varepsilon<1$, $l-\varepsilon>0$.

则 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$, $\forall n>N$, 有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow l-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l+\varepsilon$

因此 $(l-\varepsilon)^{n-N-1} \prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1 < a_n < (l+\varepsilon)^{n-N-1} \prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1$

$$\Rightarrow (l-\varepsilon)^{\frac{n-N-1}{n}} \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < (l+\varepsilon)^{\frac{n-N-1}{n}} \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1\right)^{\frac{1}{n}}$$

令 $n\to+\infty$, $\Rightarrow l-\varepsilon \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le l+\varepsilon$

由 ε 任意性可知. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

②若 $l=0$. 由A可知 $0 < a_n < \varepsilon^{n-N-1} \cdot \prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon^{\frac{n-N-1}{n}} \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_1\right)^{\frac{1}{n}}$$

令 $n\to+\infty$ $\Rightarrow$ $0 \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varepsilon$

由 ε 任意性 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

D. 当 $l\in(0,1)$ 时. 取 $a_n=\begin{cases} l^n-l^{n+1}, & n\text{为奇数} \\ l^n+l^{n+1}, & n\text{为偶数} \end{cases}$

则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases} \dfrac{l^{n+1}+l^{n+2}}{l^n-l^{n+1}}=\dfrac{l+l^2}{1-l}, & n\text{为奇数} \quad >l. \\ \dfrac{l^{n+1}-l^{n+2}}{l^n+l^{n+1}}=\dfrac{l-l^2}{1+l}, & n\text{为偶数} \quad <l \end{cases}$

显然并没有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l.$

但 $\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases} \sqrt[n]{l^n-l^{n+1}}=l\sqrt[n]{1-l}, & n\text{为奇数} \\ \sqrt[n]{l^n+l^{n+1}}=l\sqrt[n]{1+l}, & n\text{为偶数} \end{cases}$

奇偶子列极限均为 l. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$

例题 2.6

解: (1) 取 $a_n=n$, $b_n=n+\dfrac{1}{(n+1)^2}$, $c_n=n+\dfrac{1}{n+1}$ 即可.

(2) 有 $0\le b_n-a_n\le c_n-a_n$, 使用夹逼定理

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0.$ 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=A$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=A.$

例题 2.7

解. A. 显然是正确的

B. 取 $a_n=(-1)^n$ 即可.

C. 取 $a_n=\sqrt{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

D. 取 $a_n=n$. 则 $\{a_n\}$ 无收敛子列.

例题 2.8

证明：若 $x_n \in (0, \frac{1}{2})$，则 $x_{n+1} > 0$.

由 $x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\{x_n\}$ 有上界 $\frac{1}{2}$ 与下界 0.

同时 $x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)} > x_n$.

由单调有界定理，可知 $\{x_n\}$ 收敛

在 $x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)}$ 两边取极限 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

例题 2.9

证明：$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N \in \mathbb{Z}_+$，$\frac{1}{2^N} < \varepsilon$.

则 $\forall n > N$，$\forall p \in \mathbb{Z}_+$，有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

由 Cauchy 收敛准则可知 $\{x_n\}$ 收敛.

例题 2.10

解：取 $a_n = \sqrt{n}$.

则 $\forall p \in \mathbb{Z}_+$，$\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+p} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}} = 0$.

关键在于这个 N 选取对于 p 是非一致的

例题 3.2.

证明: $|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$

$< 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$.

$\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ 即可.

例题 3.3.

解: A. 取 $f(x)\equiv 2025$.

B. 局部保号性

C. 取 $f(x)\equiv 2025$

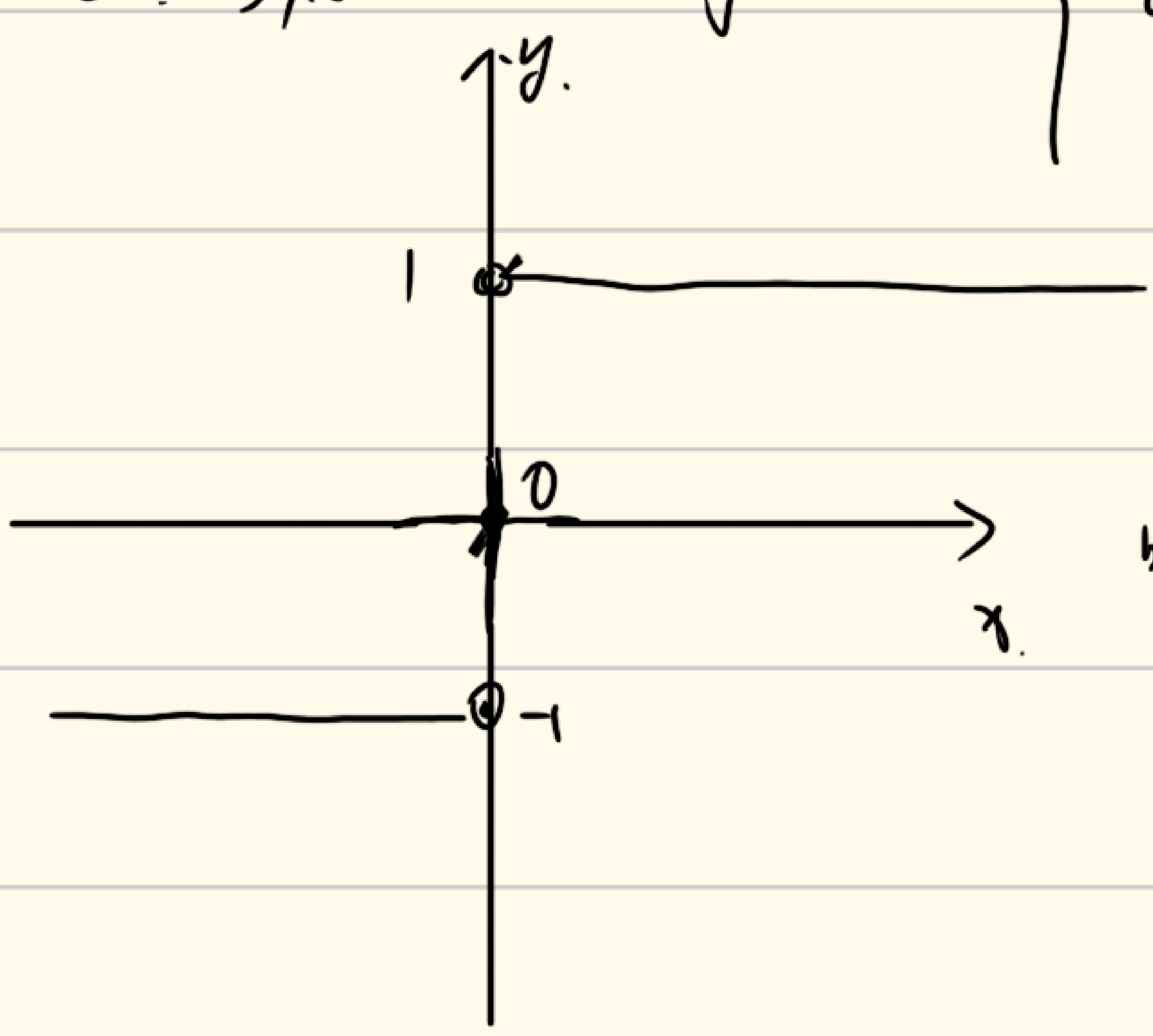
D. 取 $f(x)=\begin{cases}0, & x=1\\ 2025, & \text{其他}\end{cases}$.

例题 3.6.

解: A. 取 $x_n=n$, 则 $\{f(n)\}$单增, 由单调有界定理知其收敛.

B. $\{x_n\}$单调 $\Rightarrow$ $\{f(x_n)\}$单调, 使用单调有界定理即可.

C. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$



取 $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$.

则 $\{f(x_n)\}$发散, $\{x_n\}$收敛.

D. 考虑 $x_n=n$ 即可.

例题 3.11（注意"="的含义）

解：A $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x}=0$　显然成立

B. A对，B显然对

C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)\cdot o(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}x=0$

D. 注意到 $x^3=o(x)$，$x^3=o(x^2)$

例题 3.12

解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}\,(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\cdot(\frac{1}{2}\frac{1}{n^4})}{\sqrt{n^2+1}-n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+1}-n)}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}=1.$

例题 3.13

证明：① 充分性

$Ae^b=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-e^b}{\cancel{x}-a}=e^b\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)-b}-1}{x-a}$

$\Rightarrow A=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)-b}-1}{x-a}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(e^{f(x)-b}-1)=\lim\limits_{x\to a}(x-a)\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)-b}-1}{x-a}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)-b)=0.$

因此 $A = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^{f(x)-b}-1}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-b}{x-a}$

② 必要性 略，几乎是充分性反写.

例题 3.14

解：$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{\dfrac{x^2-3x+1}{x^2}} = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x+1} - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x+1} + x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}} + x = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{3}{2}-x) + x = \frac{3}{2}$.

例题 4.2.

解：$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$

当 $x<-1$ 时　$x^2>1$ $\Rightarrow$ $f(x)=0$.

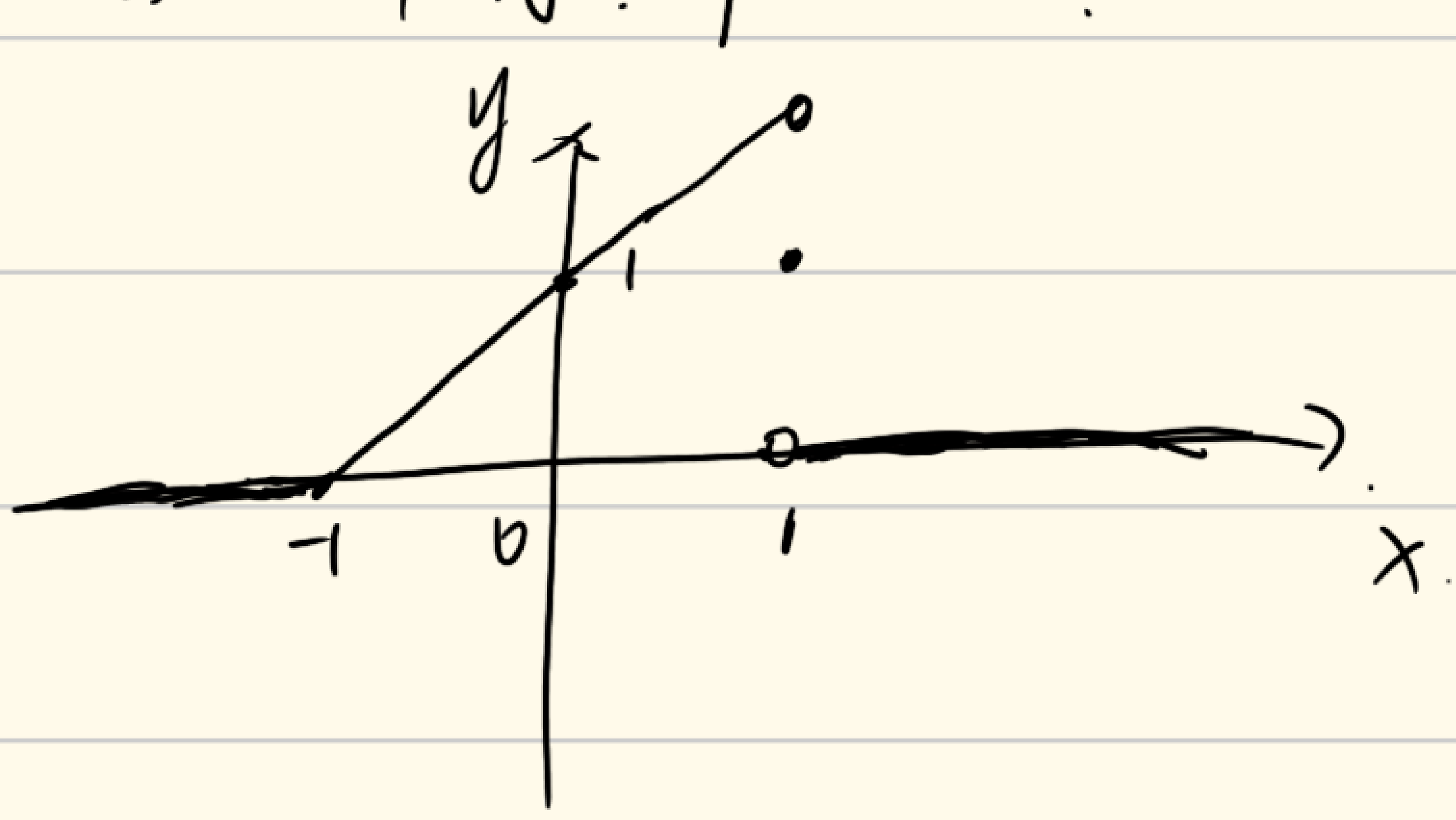
当 $x=-1$ 时. $f(x)=0$.

当 $x\in(-1,0)$ 时，$x^2\in(0,1)$，$f(x)=1+x$.

当 $x\in[0,1)$ 时，$x^2\in(0,1)$. $f(x)=1+x$.

当 $x=1$ 时，$f(x)=1$

当 $x>1$ 时. $f(x)=0$.



例题 4.3.

解：$f(x)$在R上连续 $\Rightarrow a-e^{bx}\neq 0$，$\forall x\in R$

$\Rightarrow a\leq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{bx}=+\infty \Rightarrow b>0$

例题4.4

解：1为$f(x)$的可去间断点 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在

且 $f(1)\neq\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 或 $f(1)$ 无定义

若 a,b 均不为1，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

若 $b=1$，则 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 不存在

若 $a=1$，且 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to1}(e^x-b)=0 \Rightarrow b=e$

例题4.5

解：A. 取 $f(x)\equiv1$，$g(x)=\begin{cases} x, & x\leq0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$

则 $f\circ g(x)=\begin{cases} f(x)=1, & x\leq0 \\ f(x+1)=1, & x>0 \end{cases}$

B. 取 $g(x)=\begin{cases} -1, & x=0 \\ 1, & 其他 \end{cases}$

则 $(g(x))^2=1$

C. 取 $f(x)\equiv1$，$g(x)=\begin{cases} -1, & x=0 \\ 1, & 其他 \end{cases}$

$g\circ f(x)=1$

D. 由四则运算法则知其不可能连续

例题4.6

证明：设 $f(x_i)=\max\limits_{1\le k\le n}\{f(x_k)\}$

$f(x_j)=\min\limits_{1\le k\le n}\{f(x_k)\}$

考虑闭区间 $[x_1, x_n]\subset(a,b)$

设 f 在 $[x_1, x_n]$ 上最大值为 M，最小值为 m

则 $m\le f(x_j)\le f(x_i)\le M$

又 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\in[f(x_j), f(x_i)]\subset[m, M]$

由介值定理可知其成立

例题4.7

解：取 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$

显然 $f(x)$ 连续且有界

但取 $x=\frac{1}{2k\pi}$，$k\in\mathbb{Z}_+$，有 $f(x)=\sin(2k\pi)=0$

取 $x=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，$k\in\mathbb{Z}_+$，有 $f(x)=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 不存在

例题4.12

解：A. 显然是正确的

B. f, g 在 $(0,1)$ 上一致连续 $\Rightarrow$ f, g 在 $(0,1)$ 内连续

且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a^+}g(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}g(x)$ 均存在

$\Rightarrow f\cdot g$ 在 $(0,1)$ 上一致连续

C. 取 $f(x)=g(x)=x$.

D. 直接使用定义证明即可.

例题4.13.

证明: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 由 Cauchy 收敛准则

$\forall \varepsilon>0$, $\exists G>0$. $\forall x', x'' \geq G$. 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[G,+\infty)$ 上是一致连续的

又 $f(x)$ 在 $[a,G]$ 上一致连续

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

定理.4.11

证明: $F(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x), & x=b \end{cases}$ $\Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$\Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续 $\Rightarrow F(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

另一方面, 当 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续时, 由 Cauchy 收敛准则

可知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在.