数列函数极限与函数连续性

图灵 2402 郭名扬

2025 年 10 月 20 日

目录

1 写在前面

1.1 第一次辅学授课内容

了解到大家 10 月 30 号会有第一次小测，所以我们第一次辅学线下授课重点对于以往第一次小测的题目与涉及到的知识点进行一个讲解。不过由于第一次小测会考察数列极限、函数极限、函数连续性这三章的内容，我们在线下的两个半小时没有办法很深入详细地讲解每一部分的内容。对于较难的连续函数应用与一致连续的内容，我们后续会在线上专题课详细讲解。

1.2 一些你可能会使用到的书

- 《数学分析新讲》张筑生
- 《数学分析》陈纪修（这也是 23 级及之前的同学使用的数分教材，比我们现在使用的更详细）
- 《数学分析中的典型例题与方法》裴礼文（学有余力的同学可以看看）

我个人基本上只浅浅的看过上面教材的一部分，不多介绍了（

1.3 一些你可能需要的网站

- 竺院的辅学网站：https://ckc-agc.bowling233.top/
- 图灵班学习指南：https://zju-turing.github.io/TuringCourses/

后续我们会在辅学网站上放上小测题，图灵班学习指南当中可以找到之前学长回忆的历年卷。想看更多题目的同学也可以去智云上找陈锦辉老师的 PPT，上面会有很多的例题/思考题

2 数列极限

2.1 数列极限的定义

在讲解极限之前，大家先要对数列有一个认识，我们将一个从正整数集到实数集到映射称为实数列。以下部分若无特殊说明，出现的数列默认为实数列。

定义 2.1 (数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义)**.** 设 $A \in R$, 我们称数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，如果 $\forall \varepsilon \in R_+, \exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 都有 $|a_n - A| < \varepsilon$

值得说明的是，$\varepsilon - N$ 语言要比我们想象的有用的多，后续大家可以看到很多定理的证明都会基于 $\varepsilon - N$ 语言，所以这里我们对它做进一步的理解。

首先请大家写出下面这些命题的 $\varepsilon - N$ 语言的描述：

- 给定 $A \in R$, 数列 $\{a_n\}$ 不以 A 为极限
- $\{a_n\}$ 无极限

接下来请大家思考下面这些描述所对应的数列是什么样子的：

- 给定 $A \in R, \exists \varepsilon \in R_+, \exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 都有 $|a_n - A| < \varepsilon$

- 给定 $A \in R, \forall \varepsilon \in R_+, \forall N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 都有 $|a_n - A| < \varepsilon$
- 给定 $A \in R, \exists \varepsilon \in R_+, \forall N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 都有 $|a_n - A| < \varepsilon$

实际上，$\varepsilon - N$ 语言还有另外一种描述方式，$\forall \varepsilon \in R_+$, 数列 $\{a_n\}$ 里面和 A 距离超过 ε 的项只有有限多个。然而这种方式说起来并不太"分析"，大家可以用作一个辅助理解的手段。

另外，对于 $\varepsilon - N$ 定义的准确理解还依赖于大家对量词 $\forall, \exists$ 的理解，实际上对于出现在命题最开始的 $\forall$，我们可以理解为"对于每一个给定的..."，比如定义开头的 $\forall \varepsilon > 0$，我们先任取一个正实数，在接下来的证明当中我们都基于这个取定的正实数，比如我们最后找到的 N 就依赖于 ε；对于命题最后的 $\forall$，我们可以理解为"对于所有的..."。在 Cauchy 收敛准则当中大家可以更好地看到两者的不同，在数分二的一致收敛章节当中也会涉及到类似的理解。

例题 2.2. 使用定义证明：若

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = A$$

其中 A 是一个有限数，则有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A$$

例题 2.3. 设 $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$，试证：$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}(a_0 + C_n^1 a_1 + C_n^2 a_2 + \cdots + C_n^k a_k + \cdots + a_n) = a$

2.2 收敛数列的性质

- 唯一性：若收敛数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，同时也以 b 为极限，则 $a = b$
- 有界性：若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界
- 保号性：若 $\lim_{n \to +\infty} a_n = A > 0$，则 $\forall a \in (0, A), \exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 有 $a_n > a$
- 保不等式性：若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛，且 $\exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 有 $a_n \le b_n$, 则 $\lim_{n \to +\infty} a_n \le \lim_{n \to +\infty} b_n$
- 夹逼定理：若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均以 a 为极限，数列 $\{c_n\}$ 满足：$\exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 均有 $a_n \le c_n \le b_n$，则有 $\lim_{n \to +\infty} c_n = a$
- 四则运算法则

在这里可能需要说明一些事情：保不等式性对于严格不等号是不能保证的；保号性在证明当中是常用的，因为我们经常会遇到需要确定符号的情况；夹逼定理实际上也给出了求极限的一种方式，需要和放缩法结合；四则运算法则的使用需要注意条件

例题 2.4. （24-25 秋冬第一次小测）下列结论正确的是：()

A. 发散数列必无界

B. 有界数列必收敛

C. 无界数列必发散

D. 收敛数列未必有界

例题 2.5. （24-25 秋冬第一次小测）设 $\{a_n\}$ 为正数数列，且 $l \in [0, 1)$, 则下列命题正确的为 ()

A. 若 $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 则 $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

B. 若 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, 则 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$

C. 若 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 则 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

D. 若 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$，则 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$

例题 2.6. （23-24 秋冬第一次小测）设有数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$，判断下面两个说法的对错：

(1) 若 $a_n\le b_n\le c_n\ \forall n\in N_+$，且 $\lim_{n\to+\infty}(c_n-a_n)=0$, 则数列 $\{b_n\}$ 收敛

(2) 若 $a_n\le b_n\le c_n\ \forall n\in N_+$,$\lim_{n\to+\infty}(c_n-a_n)=0$，且有 $\{b_n\}$ 收敛，那么有 $\{a_n\},\{c_n\}$ 收敛

2.3 数列收敛的判定

有些同学可能会说：我们既然已经能通过定义来完成数列极限的证明，并且也知道了收敛数列的性质，是否说明我们对于数列极限的部分建立完成了呢？答案是否定的，实际上，大家仔细思考就会发现，我们对于数列极限的定义实际上是在给定 A 的情况下去证明的，这对于简单的数列，显然没有太大的问题，因为我们可以比较容易地计算出他们的极限；但是对于复杂的数列，我们并没有办法去求出他们的极限，或者我们求出了极限，不过后续进行 $|a_n-A|$ 的估计是十分困难的，那么我们就需要一些不依赖于极限值来判定数列敛散性的方法。

- 单调有界定理：单调递增且有上界的数列有极限；对于递减数列可同样理解
- 致密性定理：任何有界的数列必有收敛子列
- Cauchy 收敛准则：$\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon\in R_+,\exists N\in N_+$，使得 $\forall n,m>N$，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$

单调有界定理的使用常常和归纳法搭配;致密性定理在后续的一些定理的证明当中会用到;Cauchy 收敛准则是很有用的，它允许我们在不确定某个数列的极限的情况下来判断敛散性

这里有必要对 Cauchy 收敛准则对另一种等价表述进行一个说明：$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$，使得当 $n>N$ 时，$\forall p\in N_+$ 成立 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 。这个形式常用于处理一些部分和形式的数列。

例题 2.7. （24-25 秋冬第一次小测）设 $\{a_n\}$ 为实数列，则下列命题正确的是 ()

A. 若 $\{a_n^3\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必收敛

B. 若 $\{a_n^2\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必收敛

C. 若有 $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$，则 $\{a_n\}$ 收敛

D. 若 $\{a_n\}$ 发散，则必存在 $\{a_n\}$ 的两个收敛子列，且其极限不等

例题 2.8. （24-25 秋冬期末考试）数列 $\{x_n\}$ 满足：$0<x_1<\frac{1}{2},x_{n+1}=\frac{1}{4(1-x_n)},\forall n\in N_+$, 证明：$\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{2}$

例题 2.9. 设 $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$，试证 $\{x_n\}$ 收敛

例题 2.10. 判断下面命题的真伪:数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\forall p\in N_+$,均有 $\lim_{n\to+\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$

3 函数极限

3.1 函数极限的定义

函数极限定义有若干种不同的形式，不过他们之间区别不算大，我们以 x 趋近于 x_0 时的定义为例。

定义 3.1 (函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义). 设函数 f 在点 x_0 点某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 内有定义，A 为给定实数。若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists 0<\delta<\delta'$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称当 x 趋近于 x_0 时，f 的极限为 A。

关于函数极限的定义，我们需要说明的是：在考虑 x 趋近于 x_0 的时候，我们并不考虑函数 f 在 x_0 处是否有定义，但是要保证 f 在 x_0 的一个去心邻域当中是有定义的。

同样地，我们可以定义 x 趋近于 $+\infty,-\infty,\infty$ 的函数极限，也可以定义左右极限。在这里不过多赘述了。

和数列极限的定义一样，这里也会有使用定义去证明函数极限的题目，不过都比较基础，和数列极限也比较类似，我们只看书上的一个例题。

例题 3.2. 证明:$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

3.2 函数极限的性质

唯一性，局部有界性，局部保号性，保不等式性，夹逼定理，四则运算这些性质均与数列极限部分相类似，不过多赘述。

例题 3.3. （24-25 秋冬第一次小测）设 $\lim_{x\to 1}f(x)=2025$，则必有 ()

A. f 在 $x=1$ 处无定义

B. $\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(1,\delta)\cap D_f, f(x)>2024$

C. $\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(1,\delta)\cap D_f, f(x)\neq 2025$

D. $f(1)=2025$

3.3 函数极限的存在条件

定理 3.4 (Heine 归结原则). *设函数 f 在 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 上有定义，则 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：对于任意的含于 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 且极限为 x_0 的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)$ 存在且相等。*

归结原则说明了这样一件事情：我们原来讨论 x 趋近于 x_0 的时候，x 是连续取值的，现在实际上我们可以考察任意一个数列 $\{x_n\}$，这里 x 实际上取值是离散的，从不可列变成可列，某种程度上可能更好处理。但是实际应用的过程当中，我们没有什么好的办法去遍历这些满足条件的 $\{x_n\}$。所以归结原则往往用来证明函数 $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 的情形。

实际上这个定理的条件也可以换成 $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)$ 均存在，大家可以想一想为什么

定理 3.5 (Cauchy 收敛准则). *设函数 f 在 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 上有定义，$\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta<\delta'$，使得对于 $\forall x',x''\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$*

这一块很多的题目都会与连续性结合进行考察，单独考察函数极限的题目较少，我们看一个去年谢集学长讲义当中的题目。

例题 3.6. 设函数 f 在 R 上严格单调有界，$\{x_n\}$ 为实数列，则下列陈述中错误的是 ()

A. 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{f(x_n)\}$ 必发散

B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 必收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 发散，则 $\{x_n\}$ 必发散

D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 必收敛

3.4 无穷小量与无穷大量

定义 3.7 (无穷小量)**.** f 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上有定义，我们称 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

定义 3.8 (有界量)**.** 我们称 g 为 $x \to x_0$ 时的有界量，如果 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上有界

无穷小量和有界量的定义都是十分直观的，需要说明的是：无穷小量实际上是一个变化的量，并且只有我们指出 $x \to x_0$ 时才有意义；而有界量仅仅需要有界的条件，并不需要有极限；无穷小量实际上也是 $x \to x_0$ 时的有界量

定义 3.9 (无穷小量的阶)**.** 设 f, g 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小量：

- 若 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$，称当 $x \to x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量，记作 $f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$
- 若 $\exists K, L > 0$，使得有 $K \le \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \le L$ ，称 f, g 为 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量。若 $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \le L, x \in \mathring{U}(x_0)$ ，记作 $f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$
- 若 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称 f, g 是 $x \to x_0$ 时的等价无穷小量。记作 $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$

我们在这里对于 o 记号考察的较多，同时计算极限的时候也较多地使用了等价无穷小量，对于 O 记号一般不怎么考察，不过大家应该知道这个记号给出了 $f(x)$ 的某种上限。

有了无穷小量这种记法之后，对于 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，我们也可以等价地记为 $f(x) = A + o(1)(x \to x_0)$。进一步地，对于等价无穷小量，我们可以说 $f(x) = g(x) + o(g(x))(x \to x_0)$。这种记号也体现了某种估计的思想，当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的大小可以使用 $g(x)$ 来进行简单的估计，其中估计的误差是一个关于 g 的高阶无穷小量。

对于 o 记号的理解，大家可以看书上的这样一段话：$f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$ 与通常等式的含义是不同的。这里等式左边是一个函数，右边是一个函数类，而中间的等号的含义是“属于”。因此我们实际上有下面这种说法：$x^4 = o(x^3) = o(x^2)(x \to 0)$。遇到弄不清记号含义的情况下，最好的办法就是回归定义，将 o 转化为 lim 去理解。

比较无穷小量阶的常用参考对象是 x 的正整数幂，大家在后续学到泰勒定理等内容时会对这种使用多项式的方法去估计一般函数的思想有更好的理解。

无穷小量一个最基本的应用就是求极限，在这之前大家有必要熟悉下面的等价量：

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x-1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^b-1}{b}(x \to 0)$，其中 $a > 0, b \neq 0$；以及 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2(x \to 0)$

一个技术层面需要注意的事情是：在使用等价无穷小量进行替换求极限的时候，并不能进行加减替换，这从 $f(x) = g(x) + o(g(x))(x \to x_0)$ 来理解的话是不难的。

定义 3.10 (无穷大量)**.** 对于自变量 x 的某种趋向，所有以 $+\infty, -\infty, \infty$ 为非正常极限的函数（包括数列），都称为无穷大量。

在数列和函数中常考察的点是无界和无穷大量的区别：一个简单但不太严谨的理解是无穷大量要求 a_n 都很大，但是无界只要求 a_n 有一部分很大就行。

例题 3.11. （23-24 秋冬第一次小测）下面选项当中正确的有 ()

A. $o(x)+o(x^2)=o(x),(x\to 0)$

B. $o(x^2)+o(x^3)=o(x),(x\to 0)$

C. $o(x)\cdot o(x)=o(x),(x\to 0)$

D. $\frac{o(x^2)}{o(x)}=o(x),(x\to 0)$

例题 3.12. 求 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{2}(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}$

例题 3.13. 设有限数 a,b,A 均不为零，证明：$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=Ae^b$.

3.5 曲线的渐近线

这一块貌似没什么好讲的，大家只要知道渐近线的定义，并且会求解渐近线即可。

例题 3.14. （24-25 秋冬第一次小测）若实数 a,b 满足 $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-ax-b)=0$，求 a,b 的值

4 函数的连续性

4.1 连续的相关概念

定义 4.1 (函数在单点处的连续性)**.** 若函数 f 在 x_0 的某邻域上有定义，并且满足 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 f 在 x_0 处连续

可以看出连续性实际上是函数极限和函数值之间的相等关系，同样地，根据左右极限和函数值之间的关系，我们也可以定义左连续和右连续。

函数连续的定义实际上至少包含了三个层面的内容：f 在 x_0 处有定义；$\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在；$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

根据这三个层面的内容，我们可以引出下面几种间断点的定义：

- 可去间断点：若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，但 $f(x_0)$ 无定义或 $f(x_0)\neq A$
- 跳跃间断点：若函数 f 在 x_0 处的左右极限都存在，但 $\lim_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-}f(x)$
- 第二类间断点：使得函数至少有一侧极限不存在的点

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点。对于间断点的理解，最直观的还是借助图像的形式。可去间断点顾名思义，我们可以更改 $f(x_0)$ 这一点处的取值，使 x_0 处变成连续的；而跳跃间断点则把函数分成左右两个部分，这两个部分之间有一个"高度差"。

例题 4.2. （24-25 秋冬第一次小测）设 $f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)()$

A. 有间断点 $x=-1$

B. 有间断点 $x=1$

C. 有间断点 $x=0$

D. 无间断点

例题 4.3. （24-25 秋冬第一次小测）设函数 $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{a-e^{bx}}$，其中 a,b 为实常数，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，则有 ()

A. $a\le 0$

B. $a>0$

C. $b\le 0$

D. $b>0$

例题 4.4. （23-24 秋冬第一次小测）设 a,b 是两个实常数，已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 的可去间断点，求 a,b 的值

4.2 函数连续性的性质

函数连续性的性质大多数都基于函数极限的性质，只不过把我们在极限部分并不关注的 $f(x_0)$ 的值给补上了而已，大家可以根据极限去理解。

- 局部有界性：若 f 在 x_0 处连续，则 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上有界
- 局部保号性：若 f 在 x_0 处连续，且 $f(x_0)>0$，则 $\forall r>0,\exists U(x_0),\forall x\in U(x_0),f(x)>r$
- 四则运算性质
- 复合函数的连续性：若 f 在 x_0 处连续，且 g 在 $f(x_0)$ 处连续，则 $g\circ f$ 在 x_0 处连续

有了复合函数的连续性和四则运算性质，我们可以下这样的结论：一切初等函数在其定义区间上连续。这样我们就可以做一个极限符号的转移 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x)=f(x_0)$，来方便我们的极限计算。

例题 4.5. （24-25 秋冬第一次小测）设 f,g 在 R 上有定义，且 $f\circ g,g\circ f$ 也在 R 上有定义。已知 f 连续且 $\forall x\in R,f(x)\ne 0$，$g(x)$ 有间断点，则下列函数中可能连续的有 ()

A. $f\circ g(x)$

B. $(g(x))^2$

C. $g\circ f(x)$

D. $\frac{g(x)}{f(x)}$

4.3 闭区间上的连续函数

闭区间上连续函数的性质在后续的许多证明题当中都会用到，其性质的证明方法和证明思想也会被频繁使用。因此这一块的学习是很重要的，无论是性质还是证明方法都有必要熟练掌握。大家在后续进一步学习实数完备性定理之后，也可以尝试使用各个定理来证明下面的性质。

- 有界性：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界
- 最大最小值：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值
- 介值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，最大值为 M，最小值为 m，则 $\forall c\in[m,M],\exists x_0\in[a,b],f(x_0)=c$

例题 4.6. 函数 f 在 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：在 (a,b) 内存在点 ξ，满足 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

例题 4.7. 判断下面命题真伪：若函数 f 在 (a,b) 内连续且有界，则 $\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)$ 均存在

4.4 一致连续

一致连续是一个比连续更强的性质，而且在数分二当中我们也会经常涉及到一致连续的概念，每年数分一期末都会有一道题涉及到一致连续，这一块的学习也是很重要的。

定义 4.8 (一致连续). 设 f 为定义在区间 I 上的函数. 我们称 f 在 I 上一致连续, 如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\forall x',x''\in I,|x'-x''|<\delta,|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

其实第一眼看到一致连续的定义是有点让人摸不着头脑的，乍一看它好像和连续没什么关系。为了更深入的理解一致连续的概念，大家可以做以下几个事情：

- 如果一个函数 f 在区间 I 上是一致连续的，如何说明它是连续的
- 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是不是一致连续的
- 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是不是一致连续的

理解一致连续的关键点在于如何理解一致连续当中的"一致"，大家后续在数分二当中还会看到很多和"一致"有关的东西，比如一致收敛、一致有界。他们都表示后续的性质对于某个变量均成立，也就是并不依赖于这个变量。这里就涉及到一开始在数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义当中和大家强调的对于 $\forall$ 的理解。

如果我们写出函数 f 在 I 上连续的表达:$\forall x_0\in I,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。这里的 δ 实际上是依赖于 x_0,ε 的。而一致连续的表达则是：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0\in I,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。这里的 δ 实际上只依赖于 ε 的，它对于后续的 x_0 是"一致"成立的。从这里也能看出一致连续要比连续来的更强。

每次都通过定义去证明一个函数是否一致连续是十分费力的，我们给出下面几个结论，可以帮助我们快速证明函数的一致连续性：

定理 4.9. *函数 f 在区间 I 上一致连续的充要条件是:对任意 I 上对数列 $\{x_n\},\{y_n\}$,若 $\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$，则 $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$*

定理 4.10 (Cantor 定理). *若函数 f 在闭区间上连续，则其在该区间上一致连续*

定理 4.11. *若函数 f 在 (a,b) 上连续,则其在该区间上一致连续的充要条件为:$\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)$ 均存在*

例题 4.12. （23-24 秋冬第一次小测）下列命题正确的有 ()

A. 若函数 f,g 在 R 上连续，则 $f\cdot g$ 在 R 上连续

B. 若函数 f,g 在 $(0,1)$ 上一致连续，则 $f\cdot g$ 在 $(0,1)$ 上一致连续

C. 若函数 f,g 在 R 上一致连续，则 $f\cdot g$ 在 R 上一致连续

D. 若函数 f,g 在 R 上一致连续，则 $f+g$ 在 R 上一致连续

例题 4.13. 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续