1 求导和微分

1.1 可导与可微

定义 1.1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义。如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在且有限，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可导**。该极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**，记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_{x=x_0}$。

注 1.2. 如果在上面的极限中，我们分别考虑 Δx 趋近于 0^+ 和 0^-，则称导数为右导数和左导数, 例如在函数在有界闭区间的端点上就是如此定义导数（如果存在的话）。

定义 1.3. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义。如果函数在 x_0 处的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 为与 Δx 无关的常数，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可微**。称线性映射 $x\mapsto Ax$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**微分**，记为 $\mathrm{d}f(x_0)$。

命题 1.4. *函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是在 x_0 处可微，且此时 $A=f'(x_0)$.*

证明. **必要性（可导 $\Rightarrow$ 可微）：** 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在。定义一个无穷小量 α:

$$\alpha=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$。将上式整理，得函数增量 Δy:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

由于 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，故 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$。因此 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，即 $f(x)$ 在 x_0 处可微，且 $A=f'(x_0)$。

充分性（可微 $\Rightarrow$ 可导）： 若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$。当 $\Delta x\neq 0$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{A\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

对 $\Delta x \to 0$ 取极限，由于 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+0=A$$

极限存在，故 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$。 □

在这里我们先辨析一些关系. 首先如果函数在某个点可导，那么他在该点一定连续. 反之则不然，

定理 1.5. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

证明. 由可导的定义，存在极限,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x))=0$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

即函数在 x_0 处连续。 □

注 1.6. 可以注意到，根据我们上面的证明，如果函数在某一点改成具有单侧导数，那么函数也一定在该点具有对应的单侧的连续，进一步的，如果函数在某一点，左右导数都存在（不一定需要相等），我们即可说明函数在这一点是连续的。

示例 1.7. 绝对值函数 $|x|$，考虑其在 0 点处的连续性和是否可导.

示例 1.8.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x=0,\\ xsin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x\in(0,1].\end{cases}$$

我们考虑这个函数在零点处是否连续以及是否可导.

示例 1.9. 黎曼函数 f

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{if} x\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ \frac{1}{p} & \text{if} x=\frac{q}{p},gcd(p,q)=1,p,q\in\mathbb{N}^{+},x\in[0,1]\end{cases}$$

我们来考虑这个函数在无理点处是否连续，进一步，在无理点处是否可导呢？再进一步，我们如果适当的对 f 在有理点处的取值乘上一个幂次，我们是否可以做到，在无理点处的可导呢？

1.1.1 导数的四则运算与链式法则

定理 1.10. 设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f+\beta g$ 在 x 处可导. 且有

1. $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$;
2. $(fg)'=f'g+fg'$.

证明. (1) 这可从导数的定义和函数极限的性质直接得出.

(2) 设 f, g 在 x_0 处可导. 利用

$$f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)=[f(x)-f(x_0)]g(x)+f(x_0)[g(x)-g(x_0)]$$

可得

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

其中我们用到了 f, g 在 x_0 处的连续性. □

注 1.11. 可以尝试用可微的方式自写一遍.

推论 1.12. 设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0)\neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

证明. 设 g 在 x_0 处可导, 则 g 在 x_0 处连续. 由 $g(x_0)\neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零. 我们先说明 $1/g=\frac{1}{g}$ 在 x_0 处可导:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{g(x_0)g(x)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=-\frac{1}{g(x_0)g(x_0)}g'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

因此 $\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$.

因此 $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ 可导, 利用导数的导性, 有

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

推论得证. □

定理 1.13 (复合函数求导的链式法则)**.** 设 $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处可导，$u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 处可导，且

$$y'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

证明. 因为 g 在 x_0 处可导, 故当 x 在 x_0 附近时

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

这说明 $x \to x_0$ 时, 存在常数 C, 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leq C|x - x_0|$. 由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\left[g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right] + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微 (可导), 导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

定理 1.14. 设 f 在 x_0 附近连续有反函数 g. 如果 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

证明. 因为 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{1}$$

当 $x \to x_0$ 时上式可改写为

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + o(1)](x - x_0).$$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时, 上式表明, 当 $x\to x_0$ 时, 存在常数 $C>0$ 使得

$$|f(x)-f(x_0)|\geq C|x-x_0|,\quad \text{或}\quad |y-y_0|\geq C|g(y)-g(y_0)|.$$

特别地, 当 $y\to y_0$ 时, $x=g(y)\to g(y_0)=x_0$. 在 (1) 中代入 $x=g(y)$, $x_0=g(y_0)$ 可得

$$\begin{aligned} y &= y_0+f'(x_0)(g(y)-g(y_0))+o(g(y)-g(y_0))\quad (y\to y_0)\\ &= y_0+f'(x_0)(g(y)-g(y_0))+o(y-y_0)\quad (y\to y_0), \end{aligned}$$

或改写为

$$g(y)=g(y_0)+\frac{1}{f'(x_0)}(y-y_0)+o(y-y_0)\quad (y\to y_0).$$

这说明 g 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导, 且导数为 $\frac{1}{f'(x_0)}$. □

注 1.15. 导数 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件不能去掉. 例如 $f(x)=x^3$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可逆函数, f 处处可导, 但其反函数 $g(y)=y^{1/3}$ 在 $y=0$ 处不可导.

1.1.2 高阶导数

定理 1.16 (Leibniz 公式). *设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 x 处都具有 n 阶导数，则它们的乘积 uv 的 n 阶导数为*

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$。

证明. 使用数学归纳法证明。

1. **当 $n=1$ 时:** $(uv)^{(1)}=u'v+uv'=\binom{1}{1}u'v+\binom{1}{0}uv'$，公式成立。

2. **假设 $n=m$ 时公式成立:**

$$(uv)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k)}$$

3. **证明 $n=m+1$ 时公式成立:** 对上式求导:

$$\begin{aligned}(uv)^{(m+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k)}\right)'=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left((u^{(k)})'v^{(m-k)}+u^{(k)}(v^{(m-k)})'\right)\\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k+1)}v^{(m-k)}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}\end{aligned}$$

在第一项中，令 $j=k+1$ $(k=j-1)$：

$$\sum_{j=1}^{m+1}\binom{m}{j-1}u^{(j)}v^{(m+1-j)}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m+1-k)}$$

将 $j=m+1$ 项和 $k=0$ 项单独提出，并对中间项利用二项式系数的性质 $\binom{m}{j-1}+\binom{m}{j}=\binom{m+1}{j}$：

$$\begin{aligned}&=\binom{m}{m}u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{j=1}^{m}\left(\binom{m}{j-1}+\binom{m}{j}\right)u^{(j)}v^{(m+1-j)}+\binom{m}{0}u^{(0)}v^{(m+1)}\\&=\binom{m+1}{m+1}u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{j=1}^{m}\binom{m+1}{j}u^{(j)}v^{(m+1-j)}+\binom{m+1}{0}u^{(0)}v^{(m+1)}\\&=\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}u^{(j)}v^{(m+1-j)}\end{aligned}$$

故 $n=m+1$ 时公式成立。由数学归纳法，Leibniz 公式得证。

□

有了复合函数的求导法则，莱布尼茨公式，反函数的求导公式，我们现在能求很多我们原来比较不好求的导数.（上课给出一些例子）

2 微分中值定理和 Taylor 展开

2.1 函数的极值

定义 2.1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义。若对 $\forall x\in U(x_0)$ 且 $x\neq x_0$，有 $f(x)\le f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的**极大值**。若有 $f(x)\ge f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是**极小值**。

定理 2.2 (Fermat 定理)**.** *设定义在有界闭区间 I 上的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，且 x_0 是 I 的内点，则必有 $f'(x_0)=0$。*

证明. 不妨设 $f(x_0)$ 是极大值。由极值的定义，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，即 $f(x)-f(x_0)\le 0$。

1. **右导数：** 当 $x\to x_0^+$ 时，$x-x_0>0$，故 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$。取极限得 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$。

2. **左导数:** 当 $x \to x_0^-$ 时，$x - x_0 < 0$，故 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$。取极限得 $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$。

由于 $f'(x_0)$ 存在，故必须 $f'(x_0) = 0$。 □

定理 2.3. 设 f 为 $[a,b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

证明. 设 k 是介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的数. 考虑函数 $g(x) = f(x) - kx$, 则

$$g'_+(a) \cdot g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leq 0,$$

如果上式为零, 则 k 等于 f 在 a 或 b 处的导数; 如果上式小于零, 不妨设 $g'_+(a) > 0$, $g'_-(b) < 0$, 则 g 在 a 或 b 处均不取到最大值, 从而 g 在 $[a,b]$ 的内部某一占 ξ 处取到最大值. 由 Fermat 定理, $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = k$. □

注 2.4. 这个定理说明, 如果 f 是区间 I 中的可导函数, 则其导函数 f' 的值域仍为区间. 特别地, Dirichlet 函数没有任何原函数.

2.2 微分中值定理

定理 2.5 (Rolle 定理)**.** 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$。

证明. 由于 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的性质，f 必在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m。

1. 若 $M = m$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常数，故对 $\forall\xi \in (a,b)$ 有 $f'(\xi) = 0$。

2. 若 $M > m$，由于 $f(a) = f(b)$，则最大值 M 或最小值 m 至少有一个在开区间 (a,b) 内取得。

不妨设 $f(x_0) = M$，且 $x_0 \in (a,b)$。由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导且取得极值，根据 Fermat 定理，必有 $f'(x_0) = 0$。令 $\xi = x_0$ 即可。 □

定理 2.6 (Lagrange 中值定理)**.** 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

证明. 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$。$F(x)$ 满足 Rolle 定理条件。存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$。$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。令 $F'(\xi)=0$ 即得证。 □

定理 2.7 (Cauchy 中值定理)**.** *设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明. 首先证明 $g(b)\neq g(a)$。若 $g(b)=g(a)$，由 Rolle 定理，存在 $\xi_0\in(a,b)$ 使 $g'(\xi_0)=0$，矛盾。构造辅助函数 $H(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$。$H(x)$ 满足 Rolle 定理条件。存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $H'(\xi)=0$。$H'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$。令 $H'(\xi)=0$ 即得证。 □

注 2.8. 在 *Cauthy* 定理中我们取 $g(x)=x$, 那么就是 *Lagrange* 定理.

2.3 L'Hôpital 法则

连续版本的 *stolz* 定理.

定理 2.9. *设 f,g 在 (a,b) 中可导, 且 $g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$.*

又设

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=0=\lim_{x\to a^+}g(x).$$

如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在 (或为 ∞), 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 补充定义 $f(a)=g(a)=0$, 则 f,g 在 $[a,b]$ 中连续. 由 Cauchy 中值定理, $\forall x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x\to a^+$ 时, $\xi\to a^+$, 从而由于式子

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\text{趋近于}a^+\text{极限存在}$$

我们有，$\frac{f(x)}{g(x)}$极限存在且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2}$$

□

注 2.10. (1) 如果仍有 $f'_+(a)=g'_+(a)=0$, 则可利用二次导数继续求极限:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$

高阶导数的情形类似.

(2) 区间 (a,b) 换成 $(-\infty,b)$ 或 (a,∞) 时, 有类似结论:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这可由变量代换 $x=\frac{1}{t}$ 得出.

(3) 需要注意的是, 等式 (2) 成立需要其右端极限存在 (或为无穷), 如果极限不存在, 则 (2) 就未必成立了, 读者可在 $x=0$ 处验证 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, g(x)=x$ 就是不成立的例子.

定理 2.11. *设 f,g 在 (a,b) 中可导, 且 $g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$.*

又设

$$\lim_{x\to a^+}g(x)=\infty.$$

如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

存在 (或为 ∞), 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

证明. 我们对 l 为有限的情形加以证明, $l=\infty$ 的情形可类似证明. 由已知条件, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $x\in(a,a+\eta)$ 时

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

取 $c=a+\eta$, 当 $x\in(a,c)$ 时, 由 Cauchy 微分中值定理, 存在 $\xi\in(x,c)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

上式可以改写为

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(x) - g(c)),$$

即

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{g(c)}{g(x)}.$$

利用 (3) 以及条件 $g(x) \to \infty$ $(x \to a^+)$ 不难得知, 存在正数 $\delta < \eta$, 使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 时

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon,$$

这就证明了所需结论. □

2.4 Taylor 展开

定理 2.12 (Taylor 公式 (含 Lagrange 余项)). *设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 内有 $n+1$ 阶导数，则对任意的 $x \in I$，存在 $\zeta = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(0 < \theta < 1)$ 使得*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

其中 Lagrange 余项 $R_n(x)$ 为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

证明. 令 $h = x - x_0$，我们要证明存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

构造辅助函数 $G(t)$：

$$G(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] - A(x-t)^{n+1}$$

其中 t 介于 x_0 和 x 之间，A 是待定常数。我们选取 A 使得 $G(x_0) = G(x)$。显然 $G(x) = 0$。令 $G(x_0) = 0$，则

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - A(x - x_0)^{n+1} = 0$$

$$A = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}}$$

$G(t)$ 满足 Rolle 定理的条件。故存在 ζ 介于 x_0 和 x 之间，使得 $G'(\zeta)=0$。对 $G(t)$ 求导（注意 x 是常数）：

$$G'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1)\right] - A(n+1)(x-t)^n(-1)$$
$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + A(n+1)(x-t)^n$$

将第二个求和项中的 k 替换为 $j=k-1$（即 $k=j+1$）：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j = f'(t) + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

将 $G'(t)$ 展开后，所有项几乎抵消，只剩下：

$$G'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + A(n+1)(x-t)^n$$

令 $G'(\zeta)=0$：

$$A(n+1)(x-\zeta)^n = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(x-\zeta)^n$$

由于 $x\neq\zeta$，$(x-\zeta)^n\neq 0$，可得

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

将 A 代回 $R_n(x) = A(x-x_0)^{n+1}$ 的定义，即得 Lagrange 余项。 □

定理 2.13 (Peano 余项形式). *设函数 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

证明.（证明使用 n 次 L'Hôpital 法则。）设 $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$，我们需要证明 $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$。当 $x\to x_0$ 时，分子 $R_n(x)$ 和分母 $(x-x_0)^n$ 及其直到 $n-1$ 阶导数都趋于 0。对 $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ 连续使用 L'Hôpital 法则 n 次：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \cdots \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

其中 $R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - \sum_{k=n-1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k!\frac{(x-x_0)^{k-(n-1)}}{(k-(n-1))!}$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$$

则极限变为

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}\\&=\frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]\end{aligned}$$

由导数定义，$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=f^{(n)}(x_0)$。故极限为 $\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)]=0$。得证。 □

注 2.14. 如果有时间介绍积分余项和柯西余项

2.5 Taylor 公式和微分学的应用

定理 2.15. *设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中二阶可导. 当 $x_i\in[a,b]$ $(1\le i\le n)$ 时, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得*

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)-\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i)=-\frac{1}{2}f''(\xi)\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2,\tag{4}$$

其中 $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$.

示例 2.16. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

示例 2.17. 设 f 在 0 附近二阶可导, 且 $|f''|\le M, f(0)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}f'(0).$$