# 数学分析期末复习

# 计算相关

## 1.具体极限计算

#### 基本方法

1)将能求极限的部分先求极限
2)等价无穷小替换
3)带Peano余项的Taylor展开（注意展开点）
4)洛必达法则/Stolz定理（数列版洛必达）（注意使用条件）
5)若所求极限为求和形式，则考虑
1.定积分定义
2.夹逼准则

#### 常用技巧

1. 取指数

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

2. 通分
3. 有界量 × 无穷小量 = 无穷小量
4. 变上限积分求导

$$\left(\int_0^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = g'(x)f(g(x))$$

#### 例题

①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^3}-1+x^4\cos\frac{1}{x}}{\cos x\ln(1+2x)\tan^2 x}$$

②

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

③

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$$

④

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(\sin\sqrt{t})^2dt}{x^4}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^{x}(1+t^4)^{\frac{1}{t}}dt}{x^2}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t^2e^{\sin t}dt}{\ln(1+x^6)}$$

⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{k}{n}}{1+\sin^2\frac{k}{n}},\quad \lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$$

⑥

$$\text{若}\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=A,\text{ 则}\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{ 存在，且}\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

# 2.抽象数列计算

**思路：**

1. 单调有界收敛准则（考虑 $x_{n+1}-x_n$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$）
2. 压缩映射定理
3. Stolz 定理

e.g. 设 $f(x)\in D^3[0,1]$，$f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，$f'''(0)>0$，且 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)\in(0,1)$，设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_{n+1}=x_n(1-f(x_n))$，$x_1\in(0,1)$
求证：
① $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

② $\exists\alpha>0,\ c\neq 0$，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}cn^{\alpha}x_n=1$

# 3.导数相关计算

## 1）基本计算

**按定义计算**

e.g.1 函数 $f(x)$ 定义为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$

e.g.2已知 $g(x)$ 有**二阶连续导数**，且 $g(0)=1$，$g'(0)=0$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

1）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 $a$；
2）在 $f(x)$ 于 $x=0$ 处连续的条件下，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

**普通方程求导**

**参数方程求导**

e.g.给定参数方程：

$$\begin{cases}e^x=\sin t+2t+1\\ t\sin y-y+\frac{\pi}{2}=0\end{cases}$$

求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

**隐函数求导**

**变上限积分求导**

## 2) 极值计算与极值判定

设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有对应阶数的导数，判断 $x_0$ 是否为极值点的步骤如下：

1. 一阶导数判断：

- 若 $f'(x_0)\neq 0$，则 $x_0$ **不是极值点**；
- 若 $f'(x_0)=0$，进入二阶导数判断。

2. 二阶导数判断：

- 若 $f''(x_0)>0$，则 $x_0$ 是**极小值点**；
- 若 $f''(x_0)<0$，则 $x_0$ 是**极大值点**；
- 若 $f''(x_0)=0$，进入三阶导数判断。

3. 三阶及更高阶导数判断：

- 若 $f'''(x_0) \neq 0$，则 $x_0$ **不是极值点**；
- 若 $f'''(x_0) = 0$，继续判断更高阶导数，以此类推。

总结：
若 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$，且 $1 \leq k \leq n-1$ 阶导数均为 0：

- 若 $n$ 为**奇数**，$x_0$ 一定不是极值点；
- 若 $n$ 为**偶数**，$f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 $x_0$ 为极小值点，$f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 $x_0$ 为极大值点。

例题

1. 求 $f(x) = \int_0^x (1+t)\arctan t \, \mathrm{d}t$（$x \in \mathbb{R}$）的极值
2. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x) + (f'(x))^2 = x$ 且 $f'(0) = 0$，求证：$x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点

# 证明相关

## 二、实数系基本定理相关

### 实数系基本定理内容

1. Dedekind分割*（考的可能性不大，有兴趣的同学可以了解一下）
2. 确界原理★
3. 单调有界收敛准则★
4. Cauchy收敛准则★
5. 致密性定理 ★
6. 聚点定理
7. 闭区间套定理
8. 有限覆盖定理

*可能会考定理内容的叙述*

### 常见证明

#### (1) 确界原理与单调有界定理的互推

单调有界定理证明数列极限存在（可能会给一个具体的数列）

**一些可能的小证明:**

① 单调函数必有单侧极限
② 单调函数的间断点一定是跳跃间断点
③ 凸/凹函数在定义域内部左右导数存在（考虑$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 单调）
*推论：凹/凸函数在定义域内部必连续*
④ $\sup\limits_{x,y\in D} |f(x)-f(y)| = \sup\limits_{x\in D} f(x) - \inf\limits_{x\in D} f(x)$

**(2) Cauchy收敛准则证明**

- ① $\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\}$在$p>1$时收敛（书上例题）
- ② 若$\{a_n\}$有界，则$\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^p}\right\}$在$p>1$时收敛
  *e.g.* $\{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{2024}}\}$收敛；$\{\sum_{k=1}^{n} \frac{b_n}{k(k+1)}\}$收敛，其中$\{b_n\}$有界

**（3） 致密性定理**

- ① (证明过程中的小引理)任意数列必有单调子列
- ② 无上界数列必有发散到无穷大的子列
- ③ 与聚点定理的互推
- ④ 证明Cantor定理

**(4) 闭区间套定理**

- **① 介值性定理**

**(5) 有限覆盖定理**

- **① 证明Cantor定理**

# 三、一致连续性的证明

## ① 常用的一致连续性的证明方法

- (1)补充可去间断点
- (2)Cauchy 收敛准则
- (3)区间拼接
- (4)常见的不等式：
  当 $a,b>0$ 时：

$$a^p + b^p < (a+b)^p \quad (p\in(1,+\infty))$$

$$a^p + b^p > (a+b)^p \quad (p \in (0,1))$$

变形：

$$|a^p - b^p| \geq |a-b|^p \quad (p \in (1,+\infty))$$

$$|a^p - b^p| \leq |a-b|^p \quad (p \in (0,1))$$

- (5)导函数有界
- (6) 满足 Lipschitz 连续
- (7) 满足 Hölder 连续
- (8) 若 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续，则：
  - ① $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$，$\lambda f + \mu g(x)$ 在 $I$ 上一致连续
  - ② 若 $f(x), g(x)$ 在 $I$ 上有界，则 $f(x)g(x)$ 在 $I$ 上一致连续
- (9)Cantor定理：闭区间连续函数必定一致连续
  简单推论：（a,b）上的连续函数一致连续当且仅当其可连续延拓成[a,b]上的连续函数

**例题**

- **e.g.** 证明：$f(x) = x^{\frac{1}{2025}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续
  证明：
  $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon^{2025}$，$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$。
  均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^{\frac{1}{2025}} - x_2^{\frac{1}{2025}}| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2025}} \leq \delta^{\frac{1}{2025}} = \varepsilon$$

  由一致连续定义可得，$f(x) = x^{\frac{1}{2025}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续
- **e.g.** 证明 $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上一致连续
- **e.g.** 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上一致连续，$g(x) \in C(\mathbb{R})$，且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = 0$，求证：$g(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上一致连续。

# 四、微分中值定理的相关证明

## 一、利用连续函数在闭区间上最值的存在性与 Fermat 引理

**跟随 Rolle 定理的思路（更本质）**

**回忆Rolle 定理的证明:**

- Q1: 最值点存在性?

- Q2: 如何保证在区间内部?

eg. 导函数介值性（达布定理）的证明
若 $f \in C[a,b]$，且 $f'(a)f'(b) < 0$
求证：$\exists \xi_0 \in (a,b)$, s.t. $f'(\xi_0) = 0$

eg. 若 $f \in D[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$
求证：$\exists \xi \in [a,+\infty)$，s.t. $f'(\xi) = 0$

eg. 广义罗尔定理
设 $f \in D(a,b)$
满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$
则 $\exists \xi \in (a,b)$，s.t. $f'(\xi) = 0$

## 二、Taylor展开用于函数估阶

**Lagrange型余项的Taylor公式：**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

做题关键：

- **在哪一点进行展开？**（有高阶导数的那点）
- **展开到第几项？**（介值对应的导数阶数）
- **对哪些点在该处展开？**（一般来说题目中的所有点）

题型：导数控制
有限区间情形
**eg.1** 已知 $f(x) \in D^2[0,1]$，且 $f'(\frac{1}{2}) = 0$，
求证：$\exists \xi \in (0,1)$，使得 $|f''(\xi)| \geq 4|f(1) - f(0)|$
**e.g.** 若 $f(x) \in C^2[0,1]$ 且 $f''(x) < 0$，求证：

$$\int_0^1 f(x^2)\,dx < f\left(\frac{1}{3}\right)$$

**e.g.** 设 $f(x) \in C^1[0,1]$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

**e.g.** 设 $f(x) \in D^2[0,+\infty)$，且 $|f(x)| \le a$，$|f''(x)| \le b$，$\forall x \in (0,+\infty)$
求证：
① $\forall x \in (0,+\infty)$，$|f'(x)| \le 2a + \frac{1}{2}b$
② $\forall x \in (0,+\infty)$，$|f'(x)| \le 2\sqrt{ab}$
无限区间的情形
**e.g.** 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$，且存在 $C > 0$，使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(|x^2 f(x)| + |f''(x)|\right) \le C$$

求证：存在 $M > 0$，使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |xf'(x)| \le M$$

**e.g.** 设 $f(x) \in D^2(\mathbb{R})$，且 $\forall x \in \mathbb{R}$，$|f(x)| \le M_0$，$|f''(x)| \le M_2$
求证：$\forall x \in \mathbb{R}$，$|f'(x)| \le \sqrt{2M_0M_2}$

**e.g.** 设 $f(x) \in D^3(\mathbb{R})$，且 $\forall x \in \mathbb{R}$，$|f(x)| \le M_0$，$|f'''(x)| \le M_3$
求证：$\forall x \in \mathbb{R}$，$|f'(x)| \le \frac{\sqrt[3]{9M_0^2M_3}}{2}$

**解：**

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{h^3}{6} \cdot f'''(\xi)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{h^3}{6} \cdot f'''(\eta)$$

希望消去 $f''(x)$，
两式作差，得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^3}{6}\left(f'''(\xi) + f'''(\eta)\right)$$

$\therefore |2f'(x)h| \le 2M_0 + \frac{|h|^3}{6} \cdot 2M_3$
$\therefore |2f'(x)| \le \frac{2M_0}{|h|} + \frac{|h|^2}{3} \cdot M_3$

$\because \frac{|h|^2}{3}M_3 + \frac{2M_0}{|h|} = \frac{|h|^2}{3}M_3 + \frac{M_0}{|h|} + \frac{M_0}{|h|} \geq 3\sqrt[3]{M_0^2 \cdot \frac{M_3}{3}} = \sqrt[3]{9M_0^2 M_3}$

$\therefore |f'(x)| \leq \frac{\sqrt[3]{9M_0^2 M_3}}{2}$

# 五、一些补充的小结论

1. 设 $f(x) \in D(\mathbb{R}^+)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) \neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$。
2. 设 $f(x) \in D(\mathbb{R}^+)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。
3. 设 $f$ 为 $[a,b]$ 的 **凹函数**，$\forall x, y \in [a,b]$，满足 $x + y = a + b$，均有：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

   *e.g.* 哈达马 (Hadamard) 不等式：
   若 $f$ 是 $[a,b]$ 上的 **下凸函数**，则：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

4. $(a,b)$ 上的凹/凸函数 **内闭 Lipschitz 连续**