# 数学分析 I(H) 期末复习

## 实数完备性理论 & 一元函数积分学

郭名扬

竺可桢学院

2025 年 12 月 20 日

# 目录

# 实数完备性：七大基本定理

首先我们先简单回顾下这七个定理是什么：

1. **确界原理**：非空有上（下）界的实数集必有上（下）确界。
2. **单调有界原理**：单调有界数列必收敛。
3. **致密性定理**：有界数列必有收敛子列。
4. **闭区间套定理**：闭区间套必有唯一公共点。
5. **有限覆盖定理**：闭区间上的开覆盖必有有限子覆盖。
6. **聚点定理**：实数轴上有界无穷点集至少有一个聚点。
7. **柯西收敛准则**：数列收敛 $\Leftrightarrow$ 数列是基本列（Cauchy 列）。

这里面有一些基本的定义，比如“闭区间套”“柯西列”，这些基本的概念大家需要熟悉。

# 定理间的逻辑推导关系

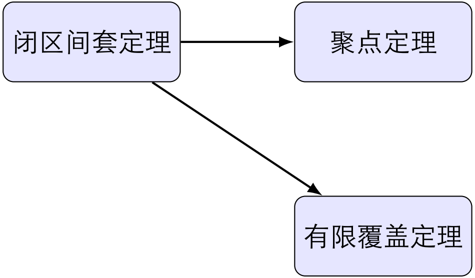
实际上，在课本的前几章，我们已经完成了如下操作：

确界原理 → 单调有界 → 致密性定理 → 柯西收敛准则

回想一下，对于第一个箭头的证明，我们是使用了确界的定义，来说明确界就是极限；对于第二个箭头的证明，我们先证明了数列都有单调子列；对于第三个箭头的证明，我们是先确定 Cauchy 列有界，之后使用致密性定理。

# 定理间的逻辑推导关系

在实数完备性理论这一章，我们做了下面的事情：

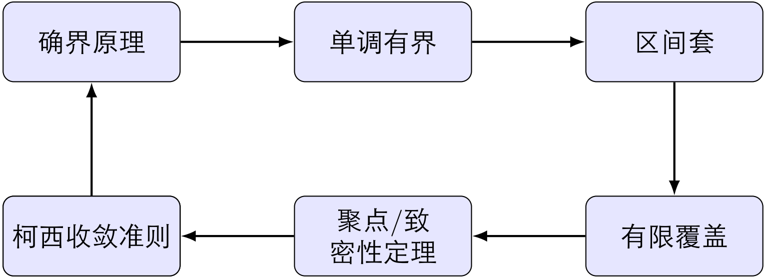



我们在这里都使用了二分区间的方法，来说明某个性质在这些区间上是继承的，所以区间可以一直二分下去，得到一个闭区间套。

需要注意性质的**继承**在构造闭区间套的时候是重要的。

# 定理之间的等价性

最常见的证明路径是这样的：




其中难度最大的应该就是从柯西收敛准则推确界原理了，这在课本上已经给出了证明，主要的想法还是构造一个上界的数列，去逼近上确界。

貌似书上这里加 * 号了，所以可能不考？

# Cauchy 收敛准则推确界原理

## 证明过程

由于 S 有上界，则 $\forall n \in N_+, \exists k \in Z, \lambda_n = \frac{k}{n}$ 为 $S$ 的上界，但是 $\lambda_n - \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n}$ 不是上界。

(这里实际上就构造了一个上界的数列，我们可以看到 $\lambda_n$ 离 $S$ 的上确界是越来越近的)

根据上界的定义，可知 $\exists \alpha \in S, \lambda_m \geq \alpha > \lambda_n - \frac{1}{n}$，因此有 $\lambda_n - \lambda_m < \frac{1}{n}$，同理有 $\lambda_m - \lambda_n < \frac{1}{m}$

(这个实际上从图形的角度也是比较好理解的，可以比较 $\lambda_n, \lambda_m, sup$ 之间的距离关系)

因此有 $|\lambda_n - \lambda_m| < max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$，根据 Cauchy 收敛准则，可知 $\{\lambda_n\}$ 收敛于 $\lambda$

容易知道 $\lambda$ 为上界，下面证明 $\forall \varepsilon \in R_+, \exists \alpha \in S, \alpha > \lambda - \varepsilon$

注意到 $\alpha > \lambda_n - \frac{1}{n} \geq \lambda_n - \frac{\varepsilon}{2} \geq \lambda - \varepsilon$ 即可。

接下来还有使用有限覆盖推出聚点定理，和聚点定理推出来 Cauchy 收敛准则。实际上，使用聚点定理可以立即得到致密性定理，所以后者证明是很容易的，我们简单看下前者。

# 有限覆盖推聚点

**证明过程：反证法**

由于 S 有界，因此 $\exists[a,b], S \in [a,b]$。由于 S 无聚点，因此 $\forall x \in [a,b], \exists U(x), U(x)$ 中只含有 S 中的有限个点。

则 $U(x)$ 的并集构成了这个闭区间的一个开覆盖，根据有限覆盖定理，我们可以从中得到一个有限覆盖。

容易知道这个有限覆盖完全覆盖了 S，但是其只包含了 S 中的有限个点，与 S 是无限集矛盾

这样我们就相当于把实数完备性定理的等价性都证明完了，接下来我们可以看一些例子。

这一块的历年题实际上直接考互推的比较少，大多数的题目都是先叙述某个定理，之后用这个定理来证明某个性质。

# 例题

**去年习题课的一个例子**

叙述有限覆盖定理，并使用有限覆盖定理证明 Cantor 定理

# 例题

## 去年习题课的一个例子

叙述有限覆盖定理，并使用有限覆盖定理证明 Cantor 定理

**证明:**

1. **利用连续性构造开覆盖:**
   - 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，因 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，故对 $\forall x \in [a,b]$，存在 $\delta_x > 0$，使得当 $t \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$ 时，有 $|f(t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。
   - $U_x = (x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x)$。显然 $U_x$ 的并集覆盖了 $[a,b]$。
2. **使用有限覆盖定理:**
   - 存在有限个点 $x_1, \ldots, x_n$，使得 $[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$。
   - 令 $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_{x_1}, \ldots, \frac{1}{2}\delta_{x_n}\}$
3. **一致连续定义:**
   - 对任意 $t_1, t_2 \in [a,b]$，若 $|t_1 - t_2| < \delta$。
   - 因 $t_1$ 必落入某个 $U_{x_k}$，即 $|t_1 - x_k| < \frac{1}{2}\delta_{x_k}$。
   - 由三角不等式: $|t_2 - x_k| \le |t_2 - t_1| + |t_1 - x_k| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_k} \le \delta_{x_k}$。
   - 故 $t_1, t_2$ 都在 $x_k$ 的 $\delta_{x_k}$ 邻域内:

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le |f(t_1) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

# 不定积分：计算方法

## 基本定义

若 $F'(x) = f(x)$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$。可以理解为寻找原函数的过程

**男生女生特别扣分的点：不定积分结果不加 C**

**一些计算方法：**

1. **凑微分（第一换元）：**

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u \quad (u = \varphi(x))$$

2. **变量代换（第二换元）：** 常见代换：$x = a\sin t, x = a\tan t, x = a\sec t$ 以及倒代换 $x = 1/t$。
3. **分部积分法：**

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

# 例题

## 例题

求不定积分：$\int \sec(x)\, dx$

# 例题

## 例题

求不定积分：$\int \sec(x)\, dx$

这个例题应该是经典中的经典了，里面有很多的想法。
其中最优雅的证法应该是这样的：

$$\begin{aligned}\int \sec(x)\, dx &= \int \frac{\sec(x)(\sec(x)+\tan(x))}{\sec(x)+\tan(x)}\, dx \\ &= \int \frac{1}{\sec(x)+\tan(x)}\, d(\sec(x)+\tan(x)) \\ &= \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C\end{aligned}$$

# 例题

但是更接近一般人想法的做法应该是这样的：

$$\begin{aligned}\int \sec(x)\,dx &= \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\,dx \\ &= \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\,dx \\ &= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\,dx \\ &= \int \frac{2}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\,d(\tan\frac{x}{2}) \\ &= \int (\frac{1}{1-\tan\frac{x}{2}}+\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}})\,d(\tan\frac{x}{2})\end{aligned}$$

# 凑微分

这个例子主要想说明凑微分这种方法的应用，实际上这个例子不同的解法都不可避免的要用到凑微分。
快速凑微分的方法就是熟悉导函数。

重要的且易忘的凑微分公式（其实就是求导公式）：

- $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
- $\sec^2 x\, dx = d(\tan x)$
- $\sec x \tan x\, dx = d(\sec x)$
- $\frac{1}{1+x^2}\, dx = d(\arctan x)$
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = d(\arcsin x)$

# 例题

历年卷当中对不定积分的考察基本上只在计算部分，且比较简单，我们看一个稍微复杂一点的例题作为这部分的结束。

## 例题

计算：$\int xe^x \sin x \, dx$

# 例题

历年卷当中对不定积分的考察基本上只在计算部分，且比较简单，我们看一个稍微复杂一点的例题作为这部分的结束。

**例题**

计算：$\int xe^x \sin x \, dx$

直接做是不太容易的，大概的过程类似于这样：

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx)
\end{aligned}
$$

因此 $I_1 = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$

# 例题

$$
\begin{aligned}
\int xe^x \sin x \, dx &= \int x \, d\left(\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right) \\
&= \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\int e^x(\sin x - \cos x)\, dx \\
&= \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x(\cos x) + C
\end{aligned}
$$

主要的想法就是不断地利用分部积分，这里还使用了一点对偶式的想法。

实际上看到指数函数和三角函数在一起，可以使用一下欧拉公式。

# 例题

$$\begin{aligned}\int xe^x i\sin x\,dx + \int xe^x \cos x\,dx &= \int xe^x e^{ix}\,dx \\ &= \int xe^{(i+1)x}\,dx \\ &= \frac{1-i}{2}\left(xe^x(\cos x + i\sin x) - \frac{1-i}{2}e^x(\cos x + i\sin x)\right) + C\end{aligned}$$

之后直接计算虚部即可。

# 定积分

- **黎曼可积定义**：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$
- **可积的充要条件**：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且不连续点构成的集合为零测集。
  “零测集”：集合 $A$ 称为零测集，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\{U_n\},U_n\subset R,A\subset\bigcup_{n=1}^\infty U_n,\sum_{n=1}^\infty |U_n|<\varepsilon$
- **可积的充要条件**：$\forall\varepsilon>0,\exists T,\sum_T \omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

定积分的计算自然不可能根据定义来求极限，实际上定义往往只用作形式化的证明，或者求部分和的极限。

可积性理论书上也是标了 *，也许不怎么考证明？所以这里先给出结论，具体的证明因时间关系先略过。一般证明可积性的时候，都是使用达部上下和做差的方法，也就是分析振幅。

# 例题

## 期末题

计算：$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$

# 例题

## 期末题

计算：$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$

证明：
没什么可说的，直接定义解决：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=[(x+1)\ln(1+x)-x]\Big|_0^1=2\ln 2-1$$

# 牛顿-莱布尼茨公式 (Newton-Leibniz)

## 定理 1

若 $f(x) \in C[a,b]$，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

## 变上限积分函数求导

设 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，若 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，则：

$$\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

# 牛顿-莱布尼茨公式 (Newton-Leibniz)

从计算的角度来说，牛顿-莱布尼茨公式说明了这样的事情，如果我们可以计算某个函数的不定积分，那么其定积分就可以直接得到。

这里把变限积分和牛顿-莱布尼茨公式放在一起，主要是考虑到了它们两个都沟通了积分与原函数的关系，特别的，变限积分给出了积分和求导的关系。

大家也需要知道这两个定理的证明，牛顿-莱布尼茨公式直接用黎曼和来证明，也可以由变限积分直接得到，变限积分求导的证明使用了积分中值定理。

变上限积分应该是期末非常喜欢考察的一块，不管是计算还是证明，需要大家熟练掌握。

**期末题**

求下面函数的极值:

$$f(x) = \int_0^x (1+t)\arctan t \, \mathrm{d}t$$

容易知道:

$$f'(x) = (1+x)\arctan x$$

因此 $f$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递增，在 $(-1,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 上递增

极大值点为 $x=-1$，极小值点为 $x=0$

# 例题

$$
\begin{aligned}
\int (1+t)\arctan t \,\mathrm{d}t &= \left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arctan t - \int \frac{\frac{t^2}{2}+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arctan t - \frac{1}{2}\int \left(\frac{t^2+1-1}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arctan t - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arctan t - \frac{1}{2}\left(t-\arctan t+\ln(1+t^2)\right)+C
\end{aligned}
$$

# 例题

## 期末题

设函数 $f$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积，且 $f$ 在 $x=0$ 处右连续，证明：$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t(0\leq x\leq 1)$ 在 $x=0$ 处的右导数等于 $f(0)$

# 例题

## 期末题

设函数 $f$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积，且 $f$ 在 $x=0$ 处右连续，证明：$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t(0\leq x\leq 1)$ 在 $x=0$ 处的右导数等于 $f(0)$

容易知道：

$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

把 $f(0)$ 也写成积分的形式：

$$f(0)=\frac{1}{x}\int_0^x f(0)\mathrm{d}t$$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x f(0)\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{x}\int_0^x [f(t)-f(0)]\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-f(0)|\,\mathrm{d}x\leq\varepsilon$$

# 定积分的性质

- 线性性：$\int_a^b (kf(x)+lg(x))\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$
- 区间可加：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- 保不等式：$f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
- 绝对值不等式：若 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$
- 积分第一中值定理：$f,g$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\xi\in(a,b), \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$
- 积分第二中值定理：$f$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g$ 在 $[a,b]$ 上递减，$g(x)\ge 0$，则 $\exists\xi\in[a,b], \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$

# 积分中值定理

我想积分第一中值定理是容易的，可能需要注意的是，$\xi$ 的取值是可以加强到 $(a,b)$ 内的，这里我们需要使用这样的性质：

$$f(x)\in C[a,b], f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b], \int_a^b f(x)\,dx=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$$

积分第二中值定理可能稍微困难一些，这里我推荐先理解它的一般形式（其中 $g$ 单调）：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

这个的证明可以使用 Abel 求和公式与积分第一中值定理来理解，具体的证明过程如下：

# 积分第二中值定理

## 证明过程

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$，则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,d(F(x)) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx = g(b)F(b) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

由于 $g$ 在 $[a,b]$ 上是单调的，因此 $g'$ 在 $[a,b]$ 上不变号，根据积分第一中值定理，有

$$g(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx = g(b)\int_a^b f(x)\,dx - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx$$

化简一下可以得到：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_a^b f(x)\,dx - (g(b)-g(a))\int_a^\xi f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

# 积分第二中值定理

## 证明退化形式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，整理一下：

$$g(a)F(\xi)+g(b)(F(b)-F(\xi)) = (g(a)-g(b))F(\xi)+g(b)F(b)$$

由于 $g$ 单调递减且非负，设 $m$ 为 $F$ 在 $[a,b]$ 上最小值，$M$ 为最大值，因此有：

$$g(a)m \le g(a)F(\xi)+g(b)(F(b)-F(\xi)) \le g(a)M$$

考虑连续函数 $h(x)=g(a)F(x)$，容易知道 $g(a)m\le h(x)\le g(a)M$，根据介值定理：

$$\exists \eta\in[a,b], h(\eta)=g(a)\int_a^\eta f(x)\,dx = g(a)F(\xi)+g(b)(F(b)-F(\xi)) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

# 积分中值定理

积分中值定理这一部分的内容难度是比较大的，但是从历年卷的题目来看，需要使用这个定理的地方不多（几乎没有?)。

如果按照考试要求的话，大家可能需要注意中值定理的不同形式的不同条件，并且理解下证明思路。

由于历年卷上没有合适的题目，我们就简单看一个题大概知道如何套用就行。

# 例子

## 题目

设 $f$ 在 $(0,1)$ 内可导，且有 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx$，试证明在 $(0,1)$ 内至少有一点 $\xi$，满足

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$$

# 例子

## 题目

设 $f$ 在 $(0,1)$ 内可导，且有 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx$，试证明在 $(0,1)$ 内至少有一点 $\xi$，满足

$$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$$

证明：先看看我们需要做什么，容易发现下面的式子成立

$$xf'(x) + f(x) = (xf(x))'$$

问题转化为找一点处的导数值为 0，同时我们容易发现：

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx}{\frac{1}{2}} = 1\cdot f(1) = \eta f(\eta), \eta \in [0,\frac{1}{2}]$$

接下来对 $xf(x)$ 在 $[\eta, 1]$ 上使用罗尔定理即可。

# 定积分的计算

定积分的计算技巧其实和不定积分类似，如果我们直接求出来了不定积分，那么根据牛顿-莱布尼茨公式就可以直接得到结果。

比较特殊的地方在于定积分需要注意积分限的变换，特别是使用了第二换元的时候。

由于有积分限这种东西，定积分还有对于特殊函数类的处理，例如：

- 周期函数在一个周期内的积分为定值。
- 当函数有对称轴或者对称中心时，如果区间也是对称的，可以算一半。
- $f \in C[0,1], \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$（我看陈锦辉老师 slides 上有，就加上了，其实就是积分限的变换）

计算题应该是最基础的部分，而且我们期末不会出偏难怪的钓鱼题。

# 例题

## 期末题

计算 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

## 期末题

计算 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

标准的积分限变换问题:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_\pi^0 \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,d(\pi-x) \\
&= \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$

# 定积分几何应用

这一部分考察还是较为频繁的，且属于“送分题”范畴，主要是对公式的考察，我个人比较喜欢先记忆微分公式：

- 直角坐标系弧长公式：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$
- 参数方程弧长公式：$\mathrm{d}s=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t)^2)}\mathrm{d}t$
- 极坐标系弧长公式：$\mathrm{d}s=\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$
- 图形绕 x 轴旋转：$\mathrm{d}V=\pi(f(x))^2\mathrm{d}x$
- 图形绕 y 轴旋转：$\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$

其实参数方程弧长公式应该是最通用的，另外两个都可以使用参数方程这个直接得到。

强烈建议做旋转体积的题目的时候画图，看好位置关系，注意符号，不要盲目套公式!

~~去年曲率不考，今年也不考?~~

# 例题

## 期末题

求 $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ 所围平面图形的面积

# 例题

**期末题**

求 $r=\sqrt{\cos 2\theta}$ 所围平面图形的面积

首先先确定 $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]\cup[-\frac{\pi}{4},0]$
之后画出大概的草图:

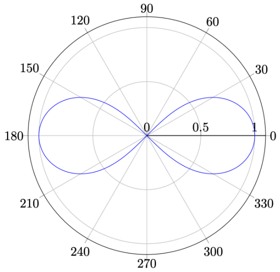



图: 来自图灵回忆卷解答

# 例题

只计算第一象限的就可以了：

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta = 1$$

这里需要使用极坐标下的面积公式：$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$

# 例题

**期末题**

求 $y = e^x$ 过点 $(0,0)$ 的切线 $L$，并求 $y = e^x, L, y$ 轴所夹图形绕 $x$ 轴旋转一周的体积。

# 例题

## 期末题

求 $y=e^x$ 过点 $(0,0)$ 的切线 $L$，并求 $y=e^x, L, y$ 轴所夹图形绕 $x$ 轴旋转一周的体积。

容易知道：$L: y=ex$，切点为 $(1,e)$。
因此有：

$$V=\int_0^1 \pi(e^x)^2\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \pi(ex)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi e^2}{6}-\frac{\pi}{2}$$

# 一些杂题

这一部分的题目没有想好放到哪里，总的来说是和中值定理以及泰勒公式相关的积分不等式或者存在性证明的题目。

### 期末题

$f$ 在 $R$ 上有连续二阶导数，且 $f''(x) < 0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x \leq f(\frac{1}{3})$

# 一些杂题

这一部分的题目没有想好放到哪里，总的来说是和中值定理以及泰勒公式相关的积分不等式或者存在性证明的题目。

## 期末题

$f$ 在 $R$ 上有连续二阶导数，且 $f''(x) < 0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x \le f(\frac{1}{3})$

写出 $f$ 的泰勒展开（由于涉及到大小估计，所以应该使用拉格朗日余项）：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

将 $x$ 代换为 $x^2$：

$$f(x^2) = f(x_0) + f'(x_0)(x^2 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^2 - x_0)^2 \le f(x_0) + f'(x_0)(x^2 - x_0)$$

# 一些杂题

由于 $f'$ 的信息未知，我们需要消去这一项。

取 $x_0 = \frac{1}{3}$，可得：

$$\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}x \leq f(\frac{1}{3})$$

# 一些杂题

## 期末题

已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})(n \to +\infty)$$

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f'(1)}{n+2} - \frac{1}{n+2}\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,\mathrm{d}x$$

因此有：

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,\mathrm{d}x$$

做阶数分析：

$$\left|\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |x^{n+2} f''(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{n+3}$$

# 一些杂题

因此最后一项为：$o(\frac{1}{n^2})$

对于第一项：

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

同样的道理，对于第二项：

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

回代就可以得到结论。

# 反常积分

反常积分可以分为下面两种：

- **无穷限积分**： $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$
- **瑕积分**： 设 $b$ 为瑕点， $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x$

有以下几种判别反常积分敛散性的方法：

- 对于非负的函数： 比较判别法
- 狄利克雷判别法： $F(u) = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界， $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0 ， 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。
- 阿贝尔判别法： 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛， $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界， 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

~~反常积分考察的并不多，几乎只有一个计算题?~~

# 例题

## 期末题

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，证明：$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛，且值一样。

# 例题

## 期末题

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，证明：$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛，且值一样。

首先将区间分成两部分 $[0,1],[1,+\infty]$，显然由于 $f$ 在 $[0,1]$ 上连续，因此两者在 $[0,1]$ 上的积分存在。

在 $[1,+\infty]$ 上，对前者使用狄利克雷判别法，对后者使用比较判别法即可。可以知道二者均收敛。

对后者做变换（其中第一个等号使用了分部积分）：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

# 祝大家满绩！

**Q & A**