连续函数应用与一致连续

图灵 2402 郭名扬

2025 年 11 月 13 日

目录

1 函数的连续性

1.1 连续的相关概念

定义 1.1 (函数在单点处的连续性)**.** 若函数 f 在 x_0 的某邻域上有定义，并且满足 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 f 在 x_0 处连续

可以看出连续性实际上是函数极限和函数值之间的相等关系，同样地，根据左右极限和函数值之间的关系，我们也可以定义左连续和右连续。

函数连续的定义实际上至少包含了三个层面的内容：f 在 x_0 处有定义；$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在；$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

根据这三个层面的内容，我们可以引出下面几种间断点的定义：

- 可去间断点：若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，但 $f(x_0)$ 无定义或 $f(x_0) \neq A$
- 跳跃间断点：若函数 f 在 x_0 处的左右极限都存在，但 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$
- 第二类间断点：使得函数至少有一侧极限不存在的点

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点。对于间断点的理解，最直观的还是借助图像的形式。可去间断点顾名思义，我们可以更改 $f(x_0)$ 这一点处的取值，使 x_0 处变成连续的；而跳跃间断点则把函数分成左右两个部分，这两个部分之间有一个"高度差"。

例题 1.2. （24-25 秋冬第一次小测）设 $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)()$

A. 有间断点 $x = -1$

B. 有间断点 $x = 1$

C. 有间断点 $x = 0$

D. 无间断点

例题 1.3. （24-25 秋冬第一次小测）设函数 $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{a-e^{bx}}$，其中 a, b 为实常数，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则有 ()

A. $a \leq 0$

B. $a > 0$

C. $b \leq 0$

D. $b > 0$

例题 1.4. （23-24 秋冬第一次小测）设 a, b 是两个实常数，已知 $x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-b)}$ 的可去间断点，求 a, b 的值

1.2 函数连续性的性质

函数连续性的性质大多数都基于函数极限的性质，只不过把我们在极限部分并不关注的 $f(x_0)$ 的值给补上了而已，大家可以根据极限去理解。

- 局部有界性：若 f 在 x_0 处连续，则 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上有界
- 局部保号性：若 f 在 x_0 处连续，且 $f(x_0) > 0$，则 $\forall r > 0, \exists U(x_0), \forall x \in U(x_0), f(x) > r$

- 四则运算性质
- 复合函数的连续性：若 f 在 x_0 处连续，且 g 在 $f(x_0)$ 处连续，则 $g\circ f$ 在 x_0 处连续

有了复合函数的连续性和四则运算性质，我们可以下这样的结论：一切初等函数在其定义区间上连续。这样我们就可以做一个极限符号的转移 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)=f(x_0)$，来方便我们的极限计算。

例题 1.5. （24-25 秋冬第一次小测）设 f,g 在 R 上有定义，且 $f\circ g, g\circ f$ 也在 R 上有定义。已知 f 连续且 $\forall x\in R, f(x)\neq 0$，$g(x)$ 有间断点，则下列函数中可能连续的有 ()

A. $f\circ g(x)$
B. $(g(x))^2$
C. $g\circ f(x)$
D. $\frac{g(x)}{f(x)}$

1.3 闭区间上的连续函数

闭区间上连续函数的性质在后续的许多证明题当中都会用到，其性质的证明方法和证明思想也会被频繁使用。因此这一块的学习是很重要的，无论是性质还是证明方法都有必要熟练掌握。大家在后续进一步学习实数完备性定理之后，也可以尝试使用各个定理来证明下面的性质。

- 有界性：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界
- 最大最小值：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值
- 介值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，最大值为 M，最小值为 m，则 $\forall c\in[m,M],\exists x_0\in[a,b], f(x_0)=c$

例题 1.6. 函数 f 在 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：在 (a,b) 内存在点 ξ，满足 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

例题 1.7. 判断下面命题真伪：若函数 f 在 (a,b) 内连续且有界，则 $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$ 均存在

1.4 一致连续

一致连续是一个比连续更强的性质，而且在数分二当中我们也会经常涉及到一致连续的概念，每年数分一期末都会有一道题涉及到一致连续，这一块的学习也是很重要的。

定义 1.8 (一致连续)**.** 设 f 为定义在区间 I 上的函数. 我们称 f 在 I 上一致连续, 如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\forall x',x''\in I,|x'-x''|<\delta,|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

其实第一眼看到一致连续的定义是有点让人摸不着头脑的，乍一看它好像和连续没什么关系。为了更深入的理解一致连续的概念，大家可以做以下几个事情：

- 如果一个函数 f 在区间 I 上是一致连续的，如何说明它是连续的
- 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是不是一致连续的

- 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是不是一致连续的

理解一致连续的关键点在于如何理解一致连续当中的“一致”，大家后续在数分二当中还会看到很多和“一致”有关的东西，比如一致收敛、一致有界。他们都表示后续的性质对于某个变量均成立，也就是并不依赖于这个变量。这里就涉及到一开始在数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义当中和大家强调的对于 $\forall$ 的理解。

如果我们写出函数 f 在 I 上连续的表达:$\forall x_0\in I,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。这里的 δ 实际上是依赖于 x_0,ε 的。而一致连续的表达则是: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0\in I,\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta),|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。这里的 δ 实际上只依赖于 ε 的，它对于后续的 x_0 是“一致”成立的。从这里也能看出一致连续要比连续来的更强。

每次都通过定义去证明一个函数是否一致连续是十分费力的，我们给出下面几个结论，可以帮助我们快速证明函数的一致连续性:

定理 1.9. *函数 f 在区间 I 上一致连续的充要条件是:对任意 I 上对数列 $\{x_n\},\{y_n\}$,若 $\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$，则 $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$*

定理 1.10 (Cantor 定理)**.** *若函数 f 在闭区间上连续，则其在该区间上一致连续*

定理 1.11. *若函数 f 在 (a,b) 上连续,则其在该区间上一致连续的充要条件为:$\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)$ 均存在*

例题 1.12. （23-24 秋冬第一次小测）下列命题正确的有 ()

A. 若函数 f,g 在 R 上连续，则 $f\cdot g$ 在 R 上连续

B. 若函数 f,g 在 $(0,1)$ 上一致连续，则 $f\cdot g$ 在 $(0,1)$ 上一致连续

C. 若函数 f,g 在 R 上一致连续，则 $f\cdot g$ 在 R 上一致连续

D. 若函数 f,g 在 R 上一致连续，则 $f+g$ 在 R 上一致连续

例题 1.13. 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续

2 连续性专题习题

例题 2.1. (2021 秋冬期末) 证明：如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$，则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续

例题 2.2. (2022 秋冬期末) 证明：$f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续

例题 2.3. (2024 秋冬期末) 证明：$f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续

例题 2.4. (2024 秋冬期末) 使用确界原理证明：定义在 $(0,1)$ 上的单增函数的间断点只能是跳跃间断点

例题 2.5. (2022 秋冬期末) 已知连续的非常值函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(0)$，证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有最大值或最小值

例题 2.6. 证明：非常数的连续周期函数，必有最小正周期

例题 2.7. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，则对任何自然数 $n\geq 2$，存在 $\xi_n\in[0,1]$，使得 $f(\xi_n+\frac{1}{n})=f(\xi_n)$

例题 2.8. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处连续且为一一映射，则 $f(x)$ 在 I 上必定严格单调

例题 2.9. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内连续且有界，试证明：$\forall T\in R,\exists x_n\to+\infty$，使得 $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0$

3　一些总结和理解

本讲义的内容仅局限在一致连续及其之前的内容，但是实际上，连续作为函数的一个很好的性质，在后续的章节当中也会作为条件频繁地出现。

如果仅看局限在一致连续及其之前的内容，有关函数连续性的应用，很多都基于某个函数在一个区间上的“形态”。通过一些条件的拘束，我们可以明确这个函数的“形态”。题目对于我们的要求，就需要我们把“几何直观”严谨地证明出来。

考试对于一致连续的要求基本上都基于两个方面，一个是根据某些条件，去证明一个抽象函数是一致连续的，另一个是给出一个具体函数，来证明其是一致连续的。这两个方面在上面的题目当中也有很多，其中证明的思路大多都是类似的。