



2025-2026 春夏数学分析辅学讲义-级数部分

For teaching purposes only

作者：宁郑立 竺可桢学院 混合班

Part 0: Introduction

本讲义针对竺可桢学院非数学专业的数学分析辅学，在正式开始前做出几点说明。

- **定位说明：**这是一份上课用的讲义，不能替代教材或老师的讲解。
由于课时限制，知识点整理不追求覆盖考试要求，目的是展示我认为比较重要的提示、学习建议。
以往的学长学姐已经制作了大量知识点复习的“圣遗物”，水平很高且整理仔细，各位可按需取用。
不必因资料繁多而焦虑——我当年学习数分时不知道有辅学活动，也不熟悉 CC98，大部分学习都靠课后习题和历年题。
- **核心目标：挖掘“数学味道”：**本讲义的主要作用是挖掘隐藏在级数各种定义、定理、性质背后的“味道”。为此，我会引用一些后续数学课程的知识。如果你没有兴趣，不必深究背后的证明；但这些概念对理解当下的数学分析很有帮助。

举例：课堂上已学过 x^n 在 $(0, 1)$ 上收敛到 0，但在 $x = 1$ 处不收敛。证明该级数不是一致收敛时，自然会问：为什么会选取 1 的邻域作为导出矛盾的媒介？

其实，除了 1 附近，这个级数的收敛还是很“一致”的（内闭一致）。我们还见过更不“一致”的例子。这是因为：在有限测度集合上，几乎处处收敛可推出近一致收敛——通俗说，几乎每一点都收敛的函数列，去掉一个很小的集合后就是一致收敛的。 x^n 在去掉 1 附近任意小（但非零测）的集合后，就是一致收敛的。

- **知识讲解三部分：**
 1. **第一部分：数项级数**
 - 带领大家默写基本定义、判别法；
 - 基于例题，介绍几种看待数项级数的方式；
 - 讲解例题，提升关于“凭什么收敛”或“凭什么发散”的嗅觉。
 2. **第二部分：函数项级数**（数学分析最重要的内容之一）
 - 重要定理、定义的默写
 - 整理有意思的例子；
 - 给出“长得很像定理”的例题，加深对收敛原因的形象理解。
 3. **第三部分：幂级数与 Fourier 级数**（考试重点但要求不高）
 - 简要提醒关键技术点（工科数分对证明要求不高）；
 - 有兴趣的同学可阅读华师大、复旦等标准教材的证明。
 4. **补充（时间允许）：**
 - 在前面讲解基础上，将满足一定条件的函数项级数看作线性空间；
 - 给出实变函数视角下不同收敛的关系，以及泛函分析视角下对收敛的理解；
 - 最后不加证明地列举两个逼近定理及其一般形式。

Part 1: Number Series

Review of Important defs and thms

Positive number series

定理

叙述以下定理：正项级数的比较判别法、比较判别法的极限形式、Cauchy 判别法、d'Alembert 判别法、Raabe 判别法。



注 思考：举例说明 Cauchy 判别法能够结局 d'Alembert 判别法无法解决的问题。为什么 Cauchy 判别法比 d'Alembert

判别法更加泛用?

定理 0.0.1 (积分判别法)

设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负、单调递减, 且 $a_n = f(n)$ 。则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 同敛散。即:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 收敛} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ 收敛}.$$



证明 由于 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负且单调递减, 对任意整数 $n \geq 2$, 当 $x \in [n-1, n]$ 时, 有

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n-1).$$

在区间 $[n-1, n]$ 上积分, 得

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1).$$

对 $n = 2$ 到 N 求和:

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

记 $S_N = \sum_{n=1}^N f(n)$, $I_N = \int_1^N f(x) dx$, 则上式可改写为

$$S_N - f(1) \leq I_N \leq S_{N-1}.$$

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则 S_N 有上界, 从而 I_N 有上界且单调递增 (因 $f \geq 0$), 故 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 收敛。
- 若 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 I_N 有上界, 由 $S_{N-1} \leq I_N + f(1)$ 知 S_{N-1} 有上界, 故级数收敛。

因此级数与积分同敛散。 □

注 思考: 定理中非负和单调递减的条件是否可以去掉, 会怎么样? 请举例子说明。

下面的问题 1 说明不存在万能的比较级数

问题 0.1 (1) 对于给定收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 一定存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (2) 对于给定的发散正项级数, 一定存在另一个发散的项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

问题 0.2 设正数数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

的充分必要条件是正项级数发散。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

问题 0.3 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且存在 $M > 0$, 使得对每个正整数 n 成立

$$a_k \leq M a_n, \quad n \leq k \leq 2n.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ 。

General number series

定理

叙述以下定理: Cauchy 收敛准则、Leibniz 判别法、Abel 变换、A-D 判别法



问题 0.4 Du Bois-Reymond 判别法 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

问题 0.5 Dedekind 判别法 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界。证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

注 Cauchy 收敛准则是最本质的收敛判别, Leibniz 判别法是 A-D 判别法的特例, 但我们提供了更多的直观。务必掌握如何利用 Abel 变换证明 A-D 判别法的过程, 这和上学期分部积分的意义是类似的。

注 思考: 正项级数的判别法何时可以移植到一般项级数? 不可以的时候, 我们又有怎样的启示?

例 0.1 问: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 敛散性是否相同?

例 0.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ 是否收敛

根据以上例子我们知道: 虽然很多时候正项级数的判别法在条件收敛级数中不一定适用, 但仍然有其价值。对于含参数的级数, 我们可以通过正项级数的判别法导出其绝对收敛的范围。对于条件收敛的级数, 我们可以

通过性态分析，得到一些和原来级数有关的结论。

问题 0.6 设 $p > 0$ ，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散。

在知识点讲解的最后，我们引入一个工科数学分析考试大概率不要求，但是能给我们的学习产生很多其他的概念，它可以让你对一个级数“凭什么收敛”有更直观的认知。

定理 (黎曼重排定理)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是条件收敛的实数项级数 (即收敛但不绝对收敛)。则对于任意给定的实数 L (L 可以是有限数，也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$)，存在一个置换 (重排) $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ，使得重排后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 收敛到 L 。特别地：

- 当 L 为有限实数时，重排级数收敛于 L ；
- 当 $L = +\infty$ (或 $-\infty$) 时，重排级数发散到 $+\infty$ (或 $-\infty$)。

例 0.3 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a rearrangement of the conditionally convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (the alternating harmonic series), in which the positive and negative terms appear in the same order as in the original series, respectively. Suppose that among the first n terms there are p_n positive terms, and that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = p$. Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \log 2 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{p}{1-p} \right).$$

综合前面的讲解，我们给出看待级数的几种视角。

级数的几种视角

综合前面的讲解，我们可以从以下六个不同的角度来理解无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ：

- **视角一：有限项求和的推广**
级数最朴素的想法就是“无限个数相加”。我们首先计算部分和 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ ，然后看 N 越来越大时 S_N 是否趋近于一个固定的数。因此，级数本质上就是有限和序列的极限。
- **视角二：数列的极限**
级数 $\sum a_n$ 收敛 \iff 部分和数列 $\{S_N\}$ 收敛。这个观点将级数问题完全归结为数列极限问题。所有判别法 (比较、比值、根值等) 最终都是在判断 $\{S_N\}$ 是否有极限。
- **视角三：与广义积分比较**
对于正项级数，我们可以将通项 a_n 看作某个递减函数 $f(x)$ 在整数点上的取值。此时，级数的敛散性与广义积分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 的敛散性相同 (积分判别法)。这沟通了离散与连续，提供了几何直观：级数和是矩形面积之和，积分是曲边梯形面积。
- **视角四：Cauchy 收敛准则**
级数 $\sum a_n$ 收敛 \iff 对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，当 $m > n \geq N$ 时， $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon$ 。这是从部分和序列是 Cauchy 列的角度出发，是理论分析的基础，也是证明一致收敛等更高级概念的原型。
- **视角五：Abel 变换 (分部求和)**
Abel 变换 (或称分部求和公式) 是处理形如 $\sum a_n b_n$ 的级数的重要工具。它类似于积分中的分部积分，可

以将一个级数的部分和用另一个级数的部分和表示出来。Dirichlet 判别法和 Abel 判别法都基于此。公式为：

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \quad \text{其中 } A_k = \sum_{i=1}^k a_i.$$

它揭示了“前 n 项和”与“差分”之间的权衡。

• 视角六：无穷级数 = 前有限项 + 余项

对于收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ，我们经常将 S 写成 $S_N + R_N$ ，其中 S_N 是前 N 项和， $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 称为余项。研究余项的阶（例如 $R_N = O(a_N)$ 或 $R_N \sim \frac{a_N}{N}$ ）是数值逼近和渐近分析的核心。这个观点告诉我们：级数收敛的速度完全由余项决定。

判断级数发散的六种方法

1. 通项不趋于零（必要条件）

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 或极限不存在，则级数 $\sum a_n$ 发散。这是最直接的否定判据。

2. 余项不趋于零（对收敛级数的否定）

若级数 $\sum a_n$ 的部分和 S_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) \neq 0$ （即余项不趋于零），则级数不收敛。实际上，对于收敛级数，余项必趋于零；反之，若余项不趋于零，则级数发散。

3. 柯西收敛准则的否定

存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得对任意 N ，总存在 $m > n \geq N$ ，满足 $|a_{n+1} + \cdots + a_m| \geq \varepsilon_0$ 。此时级数发散。该形式常用于证明调和级数等发散的经典论证。

4. 加括号后发散

若将级数 $\sum a_n$ 以某种方式加括号（不改变项的顺序）得到的新级数发散，则原级数必然发散。这是因为收敛级数任意加括号后仍然收敛（其逆否命题成立）。

5. 正项级数部分和序列无上界

对于正项级数，部分和 $\{S_n\}$ 单调递增。若 $\{S_n\}$ 无上界（即 $S_n \rightarrow +\infty$ ），则级数发散。可通过比较判别法、积分判别法等估计部分和的增长。

6. 通项分解为收敛与发散之和

若 $a_n = b_n + c_n$ ，其中 $\sum b_n$ 收敛，而 $\sum c_n$ 发散，则 $\sum a_n$ 发散。该法常用于将复杂级数拆分为已知敛散性的简单部分。

此外，对于正项级数，比较判别法、比值判别法、根值判别法等若直接指出发散（例如比值极限 > 1 ），自然也是有效手段。上述第六条已涵盖此类分解思想，实际应用时可灵活选用。

例 0.4 举例说明存在一个级数收敛但是每项立方之后不收敛。

Part 2: Series of Functions

为什么研究函数项级数？

数项级数告诉我们：无穷多个数相加，在什么条件下会得到一个有限的和。但数学分析更关心的是函数——如果我们把每一项换成函数，无穷多个函数相加，会得到什么？从形式上看，数项级数 $\sum a_n$ 是一个数，而函数项级数 $\sum f_n(x)$ 则试图用一个无穷和来定义一个新的函数 $S(x)$ 。对每个固定的 x ，函数项级数就是一个数项级数；如果对某个区间内的所有 x 该级数都收敛，我们就得到一个极限函数 $S(x)$ 。

这听起来很自然，但一个深刻的问题随之而来：这个由无穷和定义的极限函数 $S(x)$ ，还会保留每个 $f_n(x)$ 所具有的良好性质吗？具体来说：

- 如果每个 f_n 都连续， $S(x)$ 一定连续吗？
- 如果每个 f_n 都可积，能否交换求和与积分号，即 $\int \sum f_n = \sum \int f_n$ ？

- 如果每个 f_n 都可微，能否逐项求导，即 $(\sum f_n)' = \sum f_n'$?

很遗憾，答案都是“不一定”。经典的例子是 $f_n(x) = x^n$ 在区间 $[0, 1]$ 上：每个 f_n 连续，但极限函数 $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ 在 $x = 1$ 处不连续 ($S(1) = 1$ ，而在 $[0, 1)$ 上 $S(x) = 0$)。这个例子还表明，逐项积分虽然可行（因为不连续点只有一个，不影响积分值），但逐项求导却会彻底失败。问题的根源在于，“逐点收敛”这一概念太弱了——不同 x 处级数收敛的速度可能相差悬殊。在靠近 1 的地方， x^n 收敛到 0 的速度非常慢，导致整个函数列的收敛行为参差不齐。

为了弥补这一缺陷，我们需要一个更强的收敛概念，要求所有点上的收敛步调一致，这就是一致收敛。一致收敛保证了极限函数的连续性、可积性和可微性（在适当的附加条件下），是函数项级数理论的核心。函数项级数的主要任务因此可以概括为以下三点：

1. 研究何时能保证极限函数继承各项的良好性质；
2. 给出判断一致收敛的实用方法，如 Weierstrass M-判别法、Dirichlet 判别法和 Abel 判别法；
3. 将函数展开成幂级数或三角级数，为近似计算、求解微分方程以及信号分析提供工具。

本部分仍然会先带大家默写核心定理（点态收敛、一致收敛、M-判别法等），然后通过反例建立直觉，最后回到我们最常用的两类函数项级数：幂级数和 Fourier 级数，他们的计算都是考试的重点同时难度不太大的地方。

值得注意的是，一致收敛虽然保证了极限函数继承连续性、可积性等优良性质，但它往往是一个特别强的条件。在实际问题中，许多函数项级数并不在整个定义域上一致收敛，却在每个闭子区间上一致收敛（即内闭一致收敛），例如幂级数在其收敛区间内就是内闭一致收敛的。此外，对于定义在紧集上的连续函数列，若其逐点收敛到连续函数，则一致收敛会自动成立（Dini 定理），这又反过来说明一致收敛的成立有时并不需要我们去验证一个全局的 N 。因此，在学习一致收敛时，既要认识到它是保障极限运算可交换的关键，也要理解它并非唯一有用的收敛模式——几乎处处收敛、依测度收敛、弱收敛等概念在更广阔的数学领域中各有其用武之地。在数学分析的框架内，一致收敛是核心，但内闭一致收敛、局部一致收敛等稍弱的概念同样值得关注。

一致收敛：基本回顾（必须学会默写）

设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在集合 D 上的函数列，且逐点收敛到 $f(x)$ 。所谓一致收敛，是指收敛的速度在整个 D 上可以“统一控制”：对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在一个与 x 无关的 N ，使得当 $n > N$ 时，对所有 $x \in D$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 。用上确界范数 $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$ 来表达，一致收敛等价于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ 。

一致收敛比逐点收敛强得多，它保证了极限函数的连续性、可积性和（在适当条件下）可微性。判断一个函数列（或函数项级数的部分和）是否一致收敛，以及当不一致收敛时如何证明，是这一部分的核心技能。

判定一致收敛的常用方法（要做到熟练默写）

1. **上确界范数法**：计算 $M_n = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$ ，若 $M_n \rightarrow 0$ ，则一致收敛；若 $M_n \not\rightarrow 0$ ，则不一致收敛。这是最直接的方法，但往往需要求出上确界。
2. **Weierstrass M-判别法**（用于级数，实际场景中最常用）：若函数项级数 $\sum f_n(x)$ 满足 $|f_n(x)| \leq M_n$ 对所有 $x \in D$ 成立，且 $\sum M_n$ 收敛，则 $\sum f_n(x)$ 在 D 上一致收敛（且绝对收敛）。此法通过控制项将函数项级数转化为数项级数问题。
3. **Cauchy 一致收敛准则**：函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，使得当 $m, n > N$ 时，对所有 $x \in D$ 有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ 。对于级数，则要求 $|\sum_{k=n+1}^m f_k(x)| < \varepsilon$ 对所有 x 一致成立。
4. **Dini 定理**：若 $\{f_n\}$ 在紧集 K 上逐点收敛到连续函数 f ，且 f_n 单调（对每个 x ， $f_n(x)$ 关于 n 单调），则收敛必然一致。该定理在已知逐点收敛且极限函数连续时非常有用。
5. **内闭一致收敛**：有时我们只能证明在每个闭子区间上一致收敛（例如幂级数在收敛区间内），这称为内闭一致收敛。它足以保证逐项积分和逐项求导在区间内部成立。

否定一致收敛的常用方法

当要证明一个函数列或函数项级数不是一致收敛时，以下方法十分有效：

1. **上确界范数不趋于零**：若能证明 $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$ 不趋于 0（例如趋于一个正数或震荡），则不一致收敛。
2. **对角线法则（点列法）**：存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和点列 $\{x_n\} \subset D$ ，使得 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$ 。这是因为如果一致收敛，那么对足够大的 n ， $|f_n(x) - f(x)|$ 应在所有 x 处小于 ε_0 ，但点列 $\{x_n\}$ 提供了一个反例。
3. **Cauchy 准则的否定**：存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得对任意 N ，都能找到 $m > n \geq N$ 和某个 $x \in D$ ，满足 $|\sum_{k=n+1}^m f_k(x)| \geq \varepsilon_0$ 。该法常用于证明级数不一致收敛，特别是当通项无法用 M 判别法控制时。
4. **利用极限函数的性质**：如果每个 f_n 都连续，而极限函数 f 不连续（或在某点不连续），则收敛一定不是一致的。同样，若 f_n 可积但 $\int f_n$ 不收敛到 $\int f$ ，或 f_n 可导但导数不收敛到 f' ，也可否定一致收敛。

注 实际解题时，经常需要结合多种方法。例如，先尝试用上确界范数直接计算；若计算困难，再考虑对角线法则构造反例。对于级数，Weierstrass M -判别法是判定一致收敛的首选，但若 M 判别法失效，则需用 Cauchy 准则或 Dirichlet/Abel 判别法。

下面几个题目，既是我们今天的练习，也是大家可以加以积累的判断思路。

例 0.5 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性：

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad x \in [0, 1];$
- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 x^n, \quad x \in [0, 1];$
- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx}, \quad x \in [0, +\infty);$
- (4) $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx^2}, \quad (\text{i}) x \in [0, +\infty), \quad (\text{ii}) x \in [\delta, +\infty) (\delta > 0);$
- (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^4}}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$
- (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$
- (7) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad (\text{i}) x \in (0, +\infty), \quad (\text{ii}) x \in [\delta, +\infty) (\delta > 0).$

问题 0.7 Suppose that for each n , $u_n(x)$ is left continuous at $x = c$, and that the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ diverges. Prove that for every $\delta > 0$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ does **not** converge uniformly on the interval $(c - \delta, c)$.

下面是一道一致收敛相关的综合习题，掌握了这个我就认为你已经对一致收敛证明的操作细节十分熟悉了。当然，我们讲解这个题目的目的是为了大家方便学习书写，即使做不出来也不必过于焦虑（我第一次做也写不完整）。

例 0.6 Let $\{b_n\}$ be a nonnegative and monotonically decreasing sequence. Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ converges uniformly on \mathbb{R} if and only if $b_n = o(1/n)$, i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = 0$.

下面叙述几个关于本节开头提出的性质在一致收敛情形下的结论（仅仅是为了方便上课的时候参考，真的复习请看课本，因为是 AI 写的我审核了一下）

定理（连续性）

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛到 $S(x)$ ，且每个 f_n 在 $x_0 \in I$ 处连续，则和函数 S 也在 x_0 处连续。

证明 任取 $\varepsilon > 0$ 。由一致收敛，存在 N 使得对任意 $x \in I$ 有 $|S(x) - S_N(x)| < \varepsilon/3$ ，其中 $S_N = \sum_{n=1}^N f_n$ 。又 S_N 在

x_0 连续 (有限和), 故存在 $\delta > 0$ 使 $|x - x_0| < \delta$ 时 $|S_N(x) - S_N(x_0)| < \varepsilon/3$ 。于是

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

□

定理 (可积性)

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且每个 f_n 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 S 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 并且

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

♡

证明 由一致收敛, 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ 可积且 $\|S_n - S\|_{\infty} \rightarrow 0$ 。利用可积性: 对充分大的 n ,

$$\left| \int_a^b S_n - \int_a^b S \right| \leq \int_a^b |S_n - S| \leq (b-a) \|S_n - S\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

故 $\int_a^b S = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$ 。

□

定理 (可导性)

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上逐点收敛到 $S(x)$, 每个 f_n 在 I 上连续可导, 且导函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则 S 在 I 上可导, 并且

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in I.$$

♡

证明 设 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, 由一致收敛知 g 连续。固定 $x_0 \in I$, 考虑 $T_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, 则 T_n 可导且 $T'_n(x) \rightarrow g(x)$ 一致。由微积分基本定理, $T_n(x) = T_n(x_0) + \int_{x_0}^x T'_n(t) dt$, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt$, 故 $S'(x) = g(x)$ 。

□

以上三个证明方法希望大家都能掌握, 这是分析级数理论问题的重要手段, 特别是连续性的证明。

例 0.7 证明: 函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续, 且有各阶连续导数; 函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且有各阶连续导数。

为了进一步展示这三个性质证明思想对我们的启发, 我们先介绍幂级数的相关知识, 并且举几个例子。这个任务完成之后, 再回到这里的证明, 给出一个综合性的例题。

针对我们低年级的数分, 幂级数部分其实并没有什么好讲的。我们用这几句话来总结一下吧。**注**

- (Abel 第一定理) 幂级数具有绝对收敛圆, 边界需要单独考虑
- (Abel 第二定理) 幂级数的和函数在收敛域一定是内闭一致收敛的
- 每个幂级数都是 Taylor 级数

根据以上三个原则, 我们给出两个例题。

例 0.8 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 。

- (1) 证明: $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上连续, 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上可导;
- (2) $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的左导数是否存在?

例 0.9 求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 4}$ 的 n 阶导数。

现在回到原来那个问题，也就是一致收敛的级数性质的证明对我们有什么启发？

问题 0.8 Suppose that $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ converges on $(-1, 1)$ and that $a_n = o(1/n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S$. Prove that the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges to S .

这个问题运用了分部分估计的思想，在分析学的证明中非常常见。比如证明满足一定条件的可积函数的极限仍然是可积的，或者是证明某个序列的极限仍然在这个空间中。

最后我们给出 Fourier 级数的基本知识，对于工科数学分析，我认为只需要掌握以下定理

定理 (Dirichlet)

设 f 是以 2π 为周期的函数，在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调（或分段光滑），则 Fourier 级数在每一点 x 收敛到该点的左右极限平均值：

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

特别地，在连续点处收敛到 $f(x)$ 。

以上定理中描述的 Fourier 系数如下。对于以 2π 为周期的函数 $f(x)$ ，我们可以将其展开为三角级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

其中系数称为 Fourier 系数：

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

同时，要了解如何对函数进行延拓，周期延拓与一般周期的 Fourier 级数

设 $f(x)$ 定义在 $[0, L]$ 上。通过偶延拓或奇延拓，可以将其展开为余弦级数或正弦级数：

- 余弦级数： $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ 。
- 正弦级数： $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ 。

对于以 $2L$ 为周期的函数，Fourier 级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

其中 $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ 。

现在，我们给出一个比较有意思的题目，应该是曾经有一年微积分的期末考题，考场上许多学生由于对概念不够自信，被吓哭。

例 0.10 将函数 $f(x) = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上展开为 Fourier 正弦级数。

解 我们首先对 $f(x) = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上作奇延拓，得到周期为 2π 的奇函数 $F(x)$ 。由于 f 在 $[0, \pi]$ 上连续且分段光滑，根据 Dirichlet 收敛定理， $F(x)$ 的 Fourier 级数在每一点收敛到该点左右极限的平均值，特别在 $(0, \pi)$ 内收敛到 $\cos x$ ，在端点 $x = 0, \pi$ 处收敛到 0（因为奇延拓在端点处跳跃）。

正弦级数的系数为

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin(nx) dx.$$

利用积化和差 $\cos x \sin(nx) = \frac{1}{2}[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]$ ，计算积分：

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos x \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

代入上下限并利用 $\cos(k\pi) = (-1)^k$ ，得

$$\int_0^\pi \cos x \sin(nx) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right).$$

当 n 为奇数时， $(-1)^{n+1} = 1$ ， $(-1)^{n-1} = 1$ ，分子均为 0，故 $b_n = 0$ 。当 n 为偶数时，设 $n = 2k$ ，则

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k-1} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}.$$

因此，在 $(0, \pi)$ 内成立

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(4k^2-1)} \sin(2kx), \quad 0 < x < \pi.$$

在端点 $x = 0, \pi$ 处，Dirichlet 定理保证级数收敛到 $\frac{F(0^-)+F(0^+)}{2} = 0$ 和 $\frac{F(\pi^-)+F(\pi^+)}{2} = 0$ ，这与奇延拓后的函数值一致（尽管原函数 $f(0) = 1$ ， $f(\pi) = -1$ ）。

Part 3: Further Exploration

实变函数视角下的不同收敛模式

设 (X, \mathcal{A}, μ) 为测度空间（如 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度）， f_n, f 可测。

- 几乎处处收敛：存在零测集 N ，使得 $\forall x \notin N, f_n(x) \rightarrow f(x)$ 。记为 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 。
- 依测度收敛： $\forall \varepsilon > 0, \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$ 。记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 。
- L^p 收敛 ($1 \leq p < \infty$)： $\|f_n - f\|_p = (\int_X |f_n - f|^p d\mu)^{1/p} \rightarrow 0$ 。记为 $f_n \xrightarrow{L^p} f$ 。

在有限测度空间上，蕴含关系为：

$$\text{一致收敛} \Rightarrow \text{几乎处处收敛} \Rightarrow \text{依测度收敛}, \quad \text{一致收敛} \Rightarrow L^p \text{收敛} \Rightarrow \text{依测度收敛}.$$

反向均不成立。此外，依测度收敛的序列存在子列几乎处处收敛（Riesz 定理）。

函数项级数构成的线性空间

设 $\mathcal{F}(D)$ 为定义在集合 $D \subseteq \mathbb{R}$ 上的所有实值函数构成的线性空间，其线性运算为逐点加法与数乘。考虑 $\mathcal{F}(D)$ 中那些可以表示成一致收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 的函数，记其和函数为 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 。所有这样的和函数构成的集合记为 \mathcal{S} ，则 \mathcal{S} 是 $\mathcal{F}(D)$ 的一个线性子空间。

在 $\mathcal{F}(D)$ 上定义上确界范数 $\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$ （允许取 $+\infty$ ）。则函数列 $\{S_n\}$ （部分和）在 D 上一致收敛到 S 当且仅当 $\|S_n - S\|_\infty \rightarrow 0$ 。换言之，一致收敛正是由范数 $\|\cdot\|_\infty$ 所诱导的范数收敛。

与之对比，逐点收敛不来自于任何范数：不存在范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ 等价于 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 对所有 $x \in D$ 成立。这说明逐点收敛是比范数收敛更“弱”的拓扑概念。

注 从线性代数的观点看，选取一组基函数 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ （例如幂函数 $\{x^n\}$ 或三角函数 $\{\sin nx, \cos nx\}$ ），则每个“良好”的函数 f 可以唯一地表示为级数 $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$ ，其中系数 $\{c_n\}$ 可视作 f 在这组基下的坐标。此时，级数的收敛性（一致收敛或 L^2 收敛）保证了该坐标表示的合法性。

在实变函数论中，除了逐点收敛和一致收敛，还有几种重要的收敛概念，它们之间的关系如下图所示（此处仅文字描述）：

- **几乎处处收敛**：除去一个零测集外，逐点收敛。例如 $f_n(x) = x^n$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处收敛到 0（除去 $x = 1$ ）。
- **依测度收敛**：对任意 $\varepsilon > 0$ ， $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$ 。这是一种“概率意义”下的收敛。
- **L^p 收敛**： $\|f_n - f\|_p = (\int |f_n - f|^p)^{1/p} \rightarrow 0$ ，它是范数收敛的一种。

两个重要的逼近定理（不加证明）

以下两个定理是函数逼近论的基础，它们回答了“能否用简单的函数（多项式或三角函数）逼近复杂函数”的问题。证明涉及实变函数、泛函分析或调和分析，此处仅陈述结论。

定理（Weierstrass 逼近定理（代数形式））

设 f 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数。则存在一列多项式 $\{P_n(x)\}$ ，使得 P_n 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 f 。换言之，连续函数可以用多项式任意精确地一致逼近。

定理（Weierstrass 逼近定理（三角形式））

设 f 是 \mathbb{R} 上以 2π 为周期的连续函数。则存在一列三角多项式 $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ，使得 T_n 在 \mathbb{R} 上一致收敛到 f 。这正是 Fourier 级数理论的基础。

更一般地，对于紧 Hausdorff 空间 X 上的连续函数，若一个函数代数 \mathcal{A} 满足：(i) \mathcal{A} 包含常数函数；(ii) \mathcal{A} 能区分 X 中的点（即对任意 $x \neq y$ ，存在 $f \in \mathcal{A}$ 使 $f(x) \neq f(y)$ ）；(iii) \mathcal{A} 在共轭下封闭（对于实值函数自动满足）。则 \mathcal{A} 在 $C(X)$ 中一致稠密。这就是 **Stone-Weierstrass 定理**，它将 Weierstrass 逼近定理推广到了更一般的紧空间和函数代数。

定义（范数）

设 X 是实数域（或复数域）上的线性空间。若函数 $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ 满足：

- **正定性**： $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ ；
- **齐次性**： $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ，对任意标量 λ 成立；
- **三角不等式**： $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ，

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的一个范数，偶对 $(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范线性空间。例如， $C[a, b]$ 上的上确界范数 $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ 是一致收敛对应的范数。

定义（代数）

设 \mathcal{A} 是定义在集合 X 上的实值函数构成的线性空间（即对加法与数乘封闭）。若 \mathcal{A} 还满足：

- **对乘法封闭**：若 $f, g \in \mathcal{A}$ ，则 $f \cdot g \in \mathcal{A}$ ；
- **包含常数函数**： $1 \in \mathcal{A}$ ，

则称 \mathcal{A} 是一个函数代数。例如， $[a, b]$ 上的全体多项式构成一个代数。

定义 (测度)

设 X 是一个非空集合, \mathcal{A} 是 X 上的一个 σ -代数 (即包含 X 且对补集和可数并封闭的集族)。函数 $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ 称为 X 上的一个测度, 如果它满足:

- $\mu(\emptyset) = 0$;

- (可数可加性) 对任意一系列互不相交的集合 $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$, 有 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ 。

当 $X = \mathbb{R}^n$ 且 \mathcal{A} 为 Lebesgue 可测集时, Lebesgue 测度将区间长度推广到更一般的集合。称一个性质在 X 上几乎处处成立, 如果它成立的点集之补集是零测集 (即测度为 0 的集合)。

定义 (Hausdorff 空间)

设 (X, \mathcal{T}) 是一个拓扑空间。若对任意两个不同的点 $x, y \in X$, 都存在开集 $U, V \in \mathcal{T}$ 使得 $x \in U$, $y \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$, 则称 X 是 **Hausdorff** 空间 (或分离空间)。所有度量空间 (如 \mathbb{R}^n 及其子集、连续函数空间 $C[a, b]$ 带上确界范数诱导的拓扑) 都是 Hausdorff 空间。Hausdorff 性质保证了极限的唯一性。