多元函数微分学

图灵 2402 郭名扬

2026 年 5 月 11 日

目录

1 $\mathbb{R}^n$ 中的点集

1.1 距离、邻域与有界集

在一元函数中，$x \to x_0$ 可以用 $|x - x_0|$ 描述。多元函数中，点有多个坐标，因此我们需要用距离来描述两个点之间的接近程度。

定义 1.1 (距离与范数)**.** 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$。定义

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

其中 $\|\boldsymbol{x}\|$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的范数，$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离。

定义 1.2 (邻域)**.** 设 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，$\delta > 0$。称

$$U(\boldsymbol{x}_0; \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta\}$$

为 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域，称

$$U^\circ(\boldsymbol{x}_0; \delta) = U(\boldsymbol{x}_0; \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$$

为 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心 δ 邻域。

书上有圆邻域和方邻域的划分，但我感觉没必要:)

定义 1.3 (有界集)**.** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$。若存在 $M > 0$，使得对任意 $\boldsymbol{x} \in D$，都有 $\|\boldsymbol{x}\| \le M$，则称 D 为有界集。

1.2 内点、外点、界点与聚点

点集的局部结构可以通过邻域来刻画。直观上，内点是“周围一小圈都在集合里”的点，外点是“周围一小圈都不在集合里”的点，而界点是“无论怎么缩小邻域，都同时碰到集合内外”的点。

定义 1.4 (内点、外点与界点)**.** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$。

- 若存在 $\delta > 0$，使得 $U(\boldsymbol{x}_0; \delta) \subset D$，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 D 的内点；
- 若存在 $\delta > 0$，使得 $U(\boldsymbol{x}_0; \delta) \cap D = \varnothing$，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 D 的外点；
- 若对任意 $\delta > 0$，$U(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ 中既有属于 D 的点，也有不属于 D 的点，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 D 的边界点。

D 的全体内点构成的集合称为 D 的内部，记为 $\mathrm{int}D$；D 的全体界点构成的集合称为 D 的边界，记为 ∂D。

显然这三类点已经把整个空间都划分好了。

定义 1.5 (聚点)**.** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$。若对任意 $\delta > 0$，都有

$$U^\circ(\boldsymbol{x}_0; \delta) \cap D \neq \varnothing,$$

则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 D 的聚点。

聚点强调的是：可以用 D 中不同于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点无限逼近 $\boldsymbol{x}_0$。而聚点本身可以属于这个集合，也可以不属于这个集合。

定义 1.6 (孤立点)**.** D 当中的非聚点的点，称为孤立点。

1.3 开集、闭集

定义 1.7 (开集与闭集)**.** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$。

- 若 D 中每一个点都是 D 的内点，则称 D 为开集；
- 若 D 包含它的所有聚点，则称 D 为闭集。

定理 1.8 (开闭集的常用刻画)**.** *设 $D \subset \mathbb{R}^n$。则：*

- *D 是开集，当且仅当 $D = int\, D$；*
- *D 是闭集，当且仅当 D^c 是开集；*
- *D 是闭集，当且仅当 $\partial D \subset D$；*
- *D 是闭集，当且仅当任意收敛点列 $\boldsymbol{x}_k \in D$ 且 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$ 时，都有 $\boldsymbol{x}_0 \in D$。*

定义 1.9 (开域、闭域与区域)**.** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$。

1. 若非空开集 D 具有连通性，即 D 中任意两点之间都可以用一条完全含于 D 的有限折线相连接，则称 D 为**开域**，即开域就是非空连通开集。
2. 开域连同其边界所成的点集称为**闭域**。
3. 开域、闭域，或者开域连同其一部分界点所成的点集，统称为**区域**。

例题 1.10. 试证明：闭域一定是闭集。

2 完备性与点列

2.1 点列收敛

定义 2.1 (点列收敛)**.** 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$。若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$，使得当 $k > N$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{x}_0$，记为 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$。

定理 2.2 (按坐标收敛)**.** *设 $\boldsymbol{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$，$\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$。则*

$$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$$

当且仅当对每个 $i = 1, \dots, n$，都有

$$x_{ki} \to x_{0i}.$$

这说明，多元点列收敛可以拆成有限个一元数列收敛。这也是下面 Cauchy 收敛准则证明的基础。

2.2 Cauchy 收敛准则

定义 2.3 (Cauchy 点列)**.** 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列。若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$，使得当 $p, q > N$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q\| < \varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为 Cauchy 点列。

定理 2.4 (Cauchy 收敛准则)**.** *$\mathbb{R}^n$ 中的点列收敛，当且仅当它是 Cauchy 点列。*

解析. 必要性与一元情形完全类似。若 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得当 $k > N$ 时，

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $p, q > N$ 时，由三角不等式得到

$$\|\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q\| \le \|\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_0\| + \|\boldsymbol{x}_q - \boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon.$$

充分性可由按坐标收敛推出。若 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 Cauchy 点列，则每个坐标数列 $\{x_{ki}\}$ 都是实数 Cauchy 列。由实数完备性，每个 $\{x_{ki}\}$ 收敛到某个 x_{0i}。令 $\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$，再由按坐标收敛定理可得 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$。 □

2.3 闭域套定理

定理 2.5 (闭域套定理)**.** *设 $\{D_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭域列，它满足：*

1. *$D_n \supset D_{n+1}$，$n = 1, 2, \cdots$；*
2. *$d_n = d(D_n)$，且*
$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

则存在唯一的点 P_0，使得

$$P_0 \in D_n, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

2.4 聚点定理与有限覆盖定理

定理 2.6 (Bolzano–Weierstrass 定理)**.** *$\mathbb{R}^n$ 中任意有界点列都存在收敛子列。*

推论 2.7 (聚点定理)**.** *$\mathbb{R}^n$ 中任意有界无穷点集必有聚点。*

定理 2.8 (有限覆盖定理)**.** *设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集。若一族开集 $\{\Delta_\alpha\}$ 覆盖 K，即*

$$K \subset \bigcup_\alpha \Delta_\alpha,$$

则存在有限个开集 $\Delta_{\alpha_1}, \ldots, \Delta_{\alpha_m}$，使得

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m \Delta_{\alpha_j}.$$

3 多元函数的极限与连续

3.1 多元函数与重极限

定义 3.1 (多元函数). 设 $D \subset \mathbb{R}^n$。若对每个 $\boldsymbol{x} \in D$，按照某一规则都有唯一的实数 $f(\boldsymbol{x})$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的 n 元函数，记为

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad u = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

定义 3.2 (重极限). 设 $D \subset \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的聚点，函数 f 在 D 上有定义。若存在常数 A，使得对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当

$$\boldsymbol{x} \in D \cap U^\circ(\boldsymbol{x}_0; \delta)$$

时，都有

$$|f(\boldsymbol{x}) - A| < \varepsilon,$$

则称 f 当 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ 时的重极限存在且等于 A，记为

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A.$$

定理 3.3 (归结原则). *设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的聚点。则*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A$$

当且仅当对任意点列 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset D \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$，只要 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$，都有

$$f(\boldsymbol{x}_k) \to A.$$

归结原则常用于证明极限不存在：只需要找到两列趋向同一点的点列，使函数值趋向不同结果即可。

从这种形式的归结原则，我们可以看出，点列的无数种取法也对应了无数种逼近的路径。

例题 3.4. 讨论极限

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

是否存在。

解析. 沿路径 $y = 0$，有

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

沿路径 $x = 0$，有

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1.$$

两条路径趋向原点时函数值极限不同，因此原重极限不存在。 □

例题 3.5. 证明

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

解析. 记 $r = \sqrt{x^2+y^2}$。因为 $|x| \le r$，$|y| \le r$，所以

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{r^2 \cdot r}{r^2} = r \to 0.$$

由夹逼定理，原极限为 0。 □

从上面我们也可以看到，证明重极限不存在往往有以下几种方法：

- 证明某路径的极限与斜率有关。
- 证明某特殊路径的极限不存在。
- 证明两条特殊路径的极限存在但不相等。

3.2 累次极限与重极限

定义 3.6 (累次极限)**.** 对二元函数 $f(x,y)$，若对每个充分接近但不等于 y_0 的 y，极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$$

存在，并且

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = L,$$

则称

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = L$$

为先对 x 后对 y 的累次极限。另一顺序类似。

定理 3.7 (重极限与累次极限的关系)**.** *若重极限*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

存在，并且某一顺序的累次极限存在，则该累次极限必等于 A。因此，若两个累次极限都存在但不相等，则重极限不存在。

例题 3.8. 设

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时的两个累次极限与重极限。

解析. 先令 $x \to 0$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = -1 \quad (y \ne 0),$$

再令 $y \to 0$，得到累次极限 -1。

先令 $y \to 0$，有

$$\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = 1 \quad (x \ne 0),$$

再令 $x \to 0$，得到累次极限 1。

两个累次极限不同，因此重极限不存在。 □

现在我们得到了说明重极限不存在的另一种方法：证明两种累次极限不同。

例题 3.9. 下述二重极限存在的有（ ）。

A.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y}.$$

B.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

C.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

D.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}.$$

例题 3.10. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义。则下述关于二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

与累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

的描述正确的是（ ）。

A. 二重极限存在时，累次极限必存在。

B. 累次极限存在时，二重极限必存在。

C. 两个极限都存在时，它们必相等。

D. 若两个极限都存在时，则累次极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

也必存在。

3.3 连续性

定义 3.11 (连续)**.** 设 $D\subset\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}_0\in D$，且 $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的聚点。若

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0),$$

则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续。若 f 在 D 上每一点都连续，则称 f 在 D 上连续。

定理 3.12 (有界闭集上连续函数的性质)**.** *设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集，f 在 K 上连续。则:*

- *f 在 K 上有界;*
- *f 在 K 上可以取到最大值和最小值;*
- *f 在 K 上一致连续;*
- *若 K 道路连通，则 $f(K)$ 是区间，从而具有介值性质。*

去年小测有一个题目，完全是有界闭集连续函数的性质的陈列，这里不赘述了。

4 偏导数与全微分

4.1 偏导数

在一元函数中，导数描述的是函数值随自变量变化的瞬时变化率。对于二元函数 $z = f(x,y)$，如果暂时固定 y，只让 x 变化，就得到关于 x 的偏导数；如果固定 x，只让 y 变化，就得到关于 y 的偏导数。

定义 4.1 (偏导数)**.** 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义。若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 f 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 可偏导，此极限称为 f 在该点关于 x 的偏导数，记为

$$f_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

关于 y 的偏导数类似定义。

偏导数只反映坐标轴方向上的变化率，因此偏导数存在不能说明函数在所有方向上行为良好。

4.2 全微分与可微性

定义 4.2 (可微与全微分)**.** 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义。记

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),\qquad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

若存在常数 A,B，使得

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\qquad (\rho\to 0),$$

则称 f 在 (x_0,y_0) 处可微，并称

$$dz = A\,dx + B\,dy$$

为 f 在该点的全微分。

全微分的核心含义是：函数在一点附近可以被一个线性函数近似，且误差比距离 ρ 更小。也就是说，可微性是“局部线性化”。

定理 4.3 (可微、偏导与连续的关系)**.** *对二元函数 f，有：*

- *若 f 在 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在该点连续；*
- *若 f 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在，且*

  $$dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy;$$

- *若 f_x,f_y 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在，并且在 (x_0,y_0) 处连续，则 f 在 (x_0,y_0) 处可微。*

定理 4.4 (可微的判别式)**.** *若 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 存在，则 f 在 (x_0,y_0) 处可微，当且仅当*

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

例题 4.5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

判断 f 在原点是否可微。

解析. 先求偏导。由定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0.$$

若 f 在原点可微，则需要

$$\frac{f(x,y)-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

但沿 $y=x$，有

$$\frac{x^2x}{(2x^2)^{3/2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

当 $x\to 0$ 时不趋于 0。所以 f 在原点不可微。 □

例题 4.6. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin(xy)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则下述正确的有（　）。

A. f 在 $(0,0)$ 处不可微。

B. f 在 $(0,0)$ 处可微。

C. f 在 $(0,0)$ 处不连续。

D. f 在 $(0,0)$ 处连续。

例题 4.7. 关于函数

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|},$$

下述描述正确的有（　）。

A. f 在 $(0,0)$ 处可微。

B. $f'_x(0,0)=0$。

C. f 在 $(0,0)$ 处连续。

D. $f'_y(0,0)=0$。

5 复合函数求导与高阶偏导

5.1 链式法则

定理 5.1 (链式法则). 设

$$z = f(u,v), \qquad u = u(x,y), \qquad v = v(x,y).$$

若 f 在对应点处可微，u,v 对 x,y 可偏导，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

需要特别强调的是，上述的链式法则的陈述，只考量了复合函数的偏导数推理，但没有对 f 在 (x,y) 处的可微性做任何说明。

如果需要可微，那么还需要额外的条件：u,v 是可微的。

定理 5.2 (一阶微分形式不变性). 若 $z = f(u,v)$ 可微，则无论 u,v 是自变量还是中间变量，都有

$$dz = f_u\,du + f_v\,dv.$$

例题 5.3. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上具有连续偏导数，且

$$f(1,1) = 1, \qquad f'_x(1,1) = 1, \qquad f'_y(1,1) = 2.$$

令

$$\varphi(x) = f\big(x, f(2x-1, x^3)\big),$$

则 $\varphi'(1) =$（ ）。

- **A.** 9
- **B.** 17
- **C.** 15
- **D.** 11

5.2 高阶偏导数

定义 5.4 (二阶偏导数). 若 f_x, f_y 仍然可偏导，则称它们的偏导数为 f 的二阶偏导数：

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

其中 f_{xy}, f_{yx} 称为混合偏导数。

定理 5.5 (混合偏导相等的充分条件). 若 f_{xy} 与 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在，并且在 (x_0,y_0) 处连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0).$$

6 方向导数、梯度与 Taylor 公式

6.1 方向导数与梯度

偏导数只研究坐标方向，但多元函数还可以沿任意方向变化。方向导数正是用来刻画函数沿某一给定方向的变化率。

定义 6.1 (方向导数)**.** 设 f 在点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 的某邻域内有定义，$\boldsymbol{l}$ 是单位向量。若极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{l}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在，则称该极限为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，记为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}_0).$$

注意方向导数和偏导数之间的关联，是需要区分沿正半轴和负半轴方向的。

定义 6.2 (梯度)**.** 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处存在对所有自变量的偏导数，则称向量

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right)$$

为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的梯度。

需要注意梯度是一个向量。

定理 6.3 (方向导数公式)**.** *若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，$\boldsymbol{l}$ 是单位向量，则*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{l}.$$

因此方向导数的最大值为 $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|$，取得最大值的方向为梯度方向。

注意此处计算方向导数的时候，是需要 f 可微的，和梯度定义当中仅需要的偏导数存在不同。

从变化率/几何的角度，感性理解方向导数是不困难的。方向导数实际上就是梯度沿该方向的投影长度。

例题 6.4. 求 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ 在点 $(1,1,1)$ 沿方向 $(1,2,2)$ 的方向导数。

解析. 首先单位化方向向量:

$$\boldsymbol{l} = \frac{(1,2,2)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{(1,2,2)}{3}.$$

又

$$\nabla f = (2x + yz, 2y + xz, 2z + xy),$$

所以

$$\nabla f(1,1,1) = (3,3,3).$$

故方向导数为

$$\nabla f(1,1,1) \cdot \boldsymbol{l} = (3,3,3) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 5.$$

□

例题 6.5. 函数

$$f(x, y) = xe^{3y}$$

在点 $P(1,0)$ 处沿 $P(1,0)$ 到 $Q(4,4)$ 方向的方向导数为（ ）。

A. $\dfrac{7}{5}$

B. 其余三个选项均不正确。

C. 15

D. 3

例题 6.6. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的某邻域内有定义，有下述四个命题：

(P1) 若 f 在 (x_0,y_0) 处的所有方向导数都存在，则 f 在 (x_0,y_0) 处可微。

(P2) 若 f 在 (x_0,y_0) 处的所有方向导数都存在，则 f 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 存在。

(P3) 若 f 在 (x_0,y_0) 处的所有方向导数都存在，则 f 在 (x_0,y_0) 处连续。

(P4) 若 f 在 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在 (x_0,y_0) 处的所有方向导数都存在。

则上述命题中正确的有（ ）个。

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

本题需要意识到"可微"实际上是一个很强的结论，它表示这个函数在局部范围内任意路径都可认为是大致线性变化的，并且这个线性近似有一个统一的形式。

6.2 中值定理与 Taylor 公式

定义 6.7 (凸区域)**.** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为区域。若对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ 和任意 $\lambda \in [0,1]$，都有

$$(1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} \in D,$$

则称 D 为凸区域。

定理 6.8 (多元函数中值公式)**.** *设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸开域，f 在 D 上可微。则对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$，存在 $\theta \in (0,1)$，使得*

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \nabla f\big(\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\big) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

定理 6.9 (二元函数 Taylor 公式)**.** 设 f 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有 $k+1$ 阶连续偏导数。记 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = y - y_0$。则

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x_0,y_0) + R_k,$$

其中 *Lagrange* 余项为

$$R_k = \frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \quad 0<\theta<1.$$

特别地，二阶 Taylor 展开常写作

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =& f(x_0,y_0) + f_x\Delta x + f_y\Delta y \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2\right) + o(\rho^2), \end{aligned}$$

其中所有偏导数都在 (x_0, y_0) 处取值，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$。

7 极值与隐函数

7.1 无条件极值

定义 7.1 (局部极值)**.** 设 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的某邻域内有定义。若存在 $\delta > 0$，使得对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0; \delta)$，都有

$$f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_0),$$

则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取得局部极大值；若不等号反向，则称取得局部极小值。

定理 7.2 (极值必要条件)**.** 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导，并在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取得局部极值，则

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}.$$

满足 $\nabla f = \mathbf{0}$ 的点称为驻点/稳定点。

定理 7.3 (二元函数极值充分条件)**.** 设 f 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有连续二阶偏导数，并且

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0.$$

记

$$A = f_{xx}(x_0,y_0), \qquad B = f_{xy}(x_0,y_0), \qquad C = f_{yy}(x_0,y_0),$$
$$D = AC - B^2.$$

则：

- 若 $D > 0$ 且 $A > 0$，则 f 在该点取局部极小值；
- 若 $D > 0$ 且 $A < 0$，则 f 在该点取局部极大值；
- 若 $D < 0$，则该点不是极值点，而是鞍点；
- 若 $D = 0$，则该判别法失效，需要另作讨论。

7.2 条件极值与 Lagrange 乘数法

在前面讨论无条件极值时，我们只要求自变量在某个邻域内自由变化。例如二元函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处取极值时，若 f 在该点可偏导，则有

$$\nabla f(P_0) = \mathbf{0}.$$

但是在很多问题中，自变量并不能任意变化，而必须满足某些约束条件。例如点 (x,y,z) 被限制在曲面

$$g(x,y,z) = 0$$

上，这时我们研究的是函数 $f(x,y,z)$ 在约束曲面上的最大值或最小值，这类问题称为 **条件极值问题**。

定理 7.4 (Lagrange 乘数法的一般形式)**.** *设函数*

$$f = f(x_1, \cdots, x_n)$$

在约束条件

$$\varphi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \cdots, \quad \varphi_m(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

下求极值，其中 $f, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上具有连续的一阶偏导数。

设 $P_0 = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 是上述条件极值问题的极值点，并且约束函数的 Jacobi 矩阵

$$J_\varphi(P_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{P_0}$$

的秩为 m。则存在常数

$$\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \cdots, \lambda_m^{(0)},$$

使得

$$\left(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \cdots, \lambda_m^{(0)}\right)$$

是 Lagrange 函数

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, \cdots, x_n)$$

的稳定点。

也就是说，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(x_1, \cdots, x_n) = 0. \end{cases}$$

例题 7.5. 利用条件极值证明点 (x_0, y_0, z_0) 到平面

$$ax + by + cz + d = 0$$

的距离为

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

7.3 隐函数定理

定义 7.6 (隐函数)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^2$，函数 $F : E \to \mathbb{R}$。对于方程

$$F(x, y) = 0,$$

如果存在集合 $I, J \subset \mathbb{R}$，使得对任意 $x \in I$，有唯一确定的 $y \in J$，满足

$$(x, y) \in E, \qquad F(x, y) = 0,$$

则称方程 $F(x, y) = 0$ 确定了一个定义在 I 上、值域含于 J 的隐函数。

若将这个隐函数记为

$$y = \varphi(x),$$

则对任意 $x \in I$，都有

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

定理 7.7 (隐函数存在唯一性定理)**.** *若函数 $F(x, y)$ 满足下列条件：*

1. *F 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续；*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$，这通常称为初始条件；*
3. *F 在 D 上存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$；*
4. *$F_y(x_0, y_0) \neq 0$。*

则：

1. 存在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$，在 $U(P_0)$ 上方程

$$F(x,y)=0$$

唯一地确定了一个定义在某区间

$$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$$

上的隐函数

$$y=f(x),$$

使得当 $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时，

$$(x,f(x))\in U(P_0),\qquad F(x,f(x))\equiv 0,\qquad f(x_0)=y_0.$$

2. $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上连续。

例题 7.8. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在连续偏导数，且满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0.$$

若 z 满足

$$f(x-z,y-z)=0,$$

证明：上式确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

例题 7.9. 请证明在 $(0,0)$ 的某邻域内存在唯一的可导函数

$$y=\varphi(x)$$

满足

$$\sin y+\frac{e^y-e^{-y}}{2}=x,$$

并求其导函数 $\varphi'(x)$。

8 典型练习

例题 8.1. 以下命题不正确的有（　）。

A. 曲面

$$x^2+2y^2+3z^2=20$$

在点 $(3,2,1)$ 处的切平面方程为

$$3x+4y+3z=20.$$

B. 空间曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0\end{cases}$$

在点 $(1,-2,1)$ 处的法平面方程为

$$x-z=0.$$

C. 曲面

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$$

上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 1。

D. 平面曲线

$$x^2+xy+y^2=7$$

在点 $(1,2)$ 的法线方程为

$$4x-5y+6=0.$$

例题 8.2. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 存在二阶连续偏导数。对任意的 $\theta\in[0,2\pi)$，定义函数

$$g_\theta(t)=f(t\cos\theta,t\sin\theta).$$

若对任意的 $\theta\in[0,2\pi)$，都有

$$\left.\frac{dg_\theta}{dt}\right|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{d^2g_\theta}{dt^2}\right|_{t=0}>0,$$

证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

例题 8.3. 设二元函数 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数。

1. 若 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的稳定点，f 在 P_0 的 Hessian 矩阵正定，求证：$f(x,y)$ 在 P_0 取极小值。
2. 若 f 在每个点的 Hessian 矩阵都正定，求证：f 至多有一个稳定点。

也许 8.3 默认定义域在 R^2 上更好，或者是凸的，学长的回忆卷里面也没有提及定义域:)