

# 多元函数积分学讲义

## 重积分、曲线积分、曲面积分与含参量积分

王睿

2026年6月6日

### 课程导引

在数分 2 的学习中，积分部分相对简单，仅需掌握基本的计算技巧。涉及积分的证明不会考（好像本来也不多）。本次讲义主要回顾计算方法，重点在于重积分的坐标变换、曲线与曲面积分的参数化计算，以及三大公式的应用。

## 1 重积分

### 1.1 二重积分的概念与性质

#### 二重积分的定义

设  $f(x, y)$  在可求面积的有界闭区域  $D$  上有定义。通过分割、近似求和、取极限，若极限存在且与分割及取点无关，则称该极限为  $f$  在  $D$  上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \quad \text{或} \quad \iint_D f(x, y) dx dy.$$

**几何意义：**当  $f \geq 0$  时， $\iint_D f d\sigma$  表示以  $D$  为底、曲面  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体体积。

**基本性质：**线性性、区域可加性、保序性、绝对值不等式、中值定理等。这些比较简单也用处不大，相信学过数分 1 或微积分 1 的同学都能理解吧！

### 1.2 直角坐标下二重积分的计算

将二重积分化为累次积分：

- $x$ -型区域  $D: y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b$ :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

- $y$ -型区域类似，先对  $x$  后对  $y$  积分。

**换序技巧：**当直接积分困难时，可交换积分次序或变换坐标系。

### 1.3 三重积分的计算

#### 1.3.1 直角坐标

先一后二（投影法）：

$$\iiint_V f dV = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

先二后一（截面法）：

$$\iiint_V f \, dV = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx dy.$$

本质上其实和二重积分没啥差别。无非，二重积分积两次，三重积分积三次而已。只要把握好积分区域的边界条件，按照上述两种方法之一进行积分即可。

### 注意

快速自查！在积分计算中，越到外层变量越少！

### 习题

1. 计算

$$\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} \, dx dy,$$

其中  $D$  是由  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=1$ ,  $y=1$  围成的正方形区域。

2. 计算

$$\int_0^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

3. 计算

$$\iiint_V xyz \, dV,$$

其中  $V$  是由平面  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  和  $x+y+z=1$  所围成的四面体。

## 2 坐标变换

坐标变换是重积分计算中的重要技巧，能够将复杂的积分区域或被积函数转化为更简单的形式，甚至把不可积的变成可积的形式。常见的坐标变换包括极坐标、柱坐标和球坐标。

### 重积分中的坐标变换与雅可比矩阵：面积缩放的几何原理解析

**1. 为什么要坐标变换?**

$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy \xrightarrow{\text{为什么 } dx dy \text{ 不能直接等于 } du dv?}$   $\iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \dots$

**2. 核心原理：雅可比矩阵的几何意义**

坐标变换  $T(u, v)$

原始面积微元  $dA_{uv} = du dv$

变形的平行四边形微元

$\mathbf{J}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = (\mathbf{t}_u / du, \mathbf{t}_v / dv)$

变形后的面积  $dA_{xy} = |\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v| \approx |\det(\mathbf{J}(u, v))| du dv$

$dx dy = |\det(\mathbf{J}(u, v))| du dv$

**3. 总结：重积分换元公式**

1. 函数  $f$  代入

2. 区域  $R$  映射

3. 雅可比行列式：面积缩放因子

极坐标变换  $dx dy = r dr d\theta$

球坐标变换  $dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |\det(\mathbf{J}(u, v))| du dv$$

#### 小贴士

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 1?$$

答案是错误的！一般情况下，这个等式不成立！根据坐标变换，如果想求逆函数的偏导，应当将坐标变换的雅可比行列式取逆，而不是简单地取倒数。

### 2.1 极坐标变换

当积分区域为圆、圆环、扇形或被积函数含  $x^2 + y^2$  时常用。

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r dr d\theta.$$

#### 例题

计算  $I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ . 解:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

### 2.2 柱坐标变换

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z, dV = r dr d\theta dz.$$

适用于区域为旋转体或被积函数含  $x^2 + y^2$  的情形。本质上来讲，柱坐标变换和极坐标变换差异不大。无非就是先二后一之后，对高度积分。

## 2.3 球坐标变换

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi, \quad dV = r^2 \sin \phi \, dr d\phi d\theta.$$

其中  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。适用于球体、锥体等。

## 小贴士

不同题目可以自由选定球坐标系，也有不同的  $\theta, \phi$  的定义范围。雅可比行列式中的参数太难记？不妨现推一边这个行列式的值。

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \phi$$

## 例题

求球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  的体积。解：

$$V = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^R r^2 \sin \phi \, dr = 4\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

## 习题

1. 利用极坐标计算

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy,$$

其中  $D$  是由圆  $x^2 + y^2 \leq 2y$  所确定的区域。

2. 设  $D$  是由双曲线  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  与直线  $y = x$ ,  $y = 2x$  所围成的区域，作变换  $u = xy$ ,  $v = \frac{y}{x}$ ，将二重积分

$$I = \iint_D x^2 y^2 \, dx dy$$

化为关于  $u, v$  的累次积分，并计算其值。

3. 利用球坐标计算

$$\iiint_V z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

其中  $V$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

### 3 重积分中的对称性技巧

## 重积分对称性计算技巧 (Symmetry Calculation Techniques for Multiple Integrals)

**基本思想：利用区域和被积函数的对称性，简化计算**

#### 奇函数对称性

若  $f(-x, y) = -f(x, y)$  (对  $x$  为奇), 且  $D$  关于  $y$  轴对称:  
 $\iint_D f(x, y) dA = 0.$

#### 偶函数对称性

若  $f(x, -y) = f(x, y)$  (对  $y$  为偶), 且  $D$  关于  $x$  轴对称:  
 $\iint_D f(x, y) dA = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dA.$

例  $D$  和分离/的为  $D_1$  (上部半), 且  $D$  关于  $x$  轴对称  $D_2$  (下部上半).

#### 区域轮换对称性

若  $D$  在  $x$  和  $y$  的交换下不变 (如圆形区域), 且  $f(x, y) = f(y, x)$ :  
 $\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(y, x) dA.$

计算策略:  $\iint_D x^2 dA = \iint_D y^2 dA,$   
 所以  $\iint_D (x^2 + y^2) dA = 2 \iint_D x^2 dA$   
 (或 convert to polar).

#### 综合示例与流程

if  $f$  is even in  $z$  and  $V$  is symmetric about  $xy$ -plane  
 $\iiint_V f(x, y, z) dV = 2 \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV$

- 若区域关于  $x$  轴对称, 被积函数对  $y$  为奇函数, 则积分为零。
- 若区域关于  $xOy$ (或  $yOz, zOx$ ) 平面对称, 被积函数对  $z$ (或  $x, y$ ) 为奇函数, 积分为零。
- 若区域关于直线  $y = x$ (或  $x = z, y = z$ ) 对称, 且被积函数对称, 可利用轮换对称性。
- ...

重积分的对称性技巧本身不是一个定式, 需要我们针对函数形式仔细观察, 巧妙计算。

#### 习题

1. 设  $D$  是由  $|x| + |y| \leq 1$  所围成的菱形区域, 计算

$$I = \iint_D (x^4 + y^4 + 3xy) dx dy.$$

2. 证明质地均匀的球体绕过中心的轴旋转的转动惯量为  $\frac{2}{5}MR^2$ 。

## 4 曲线积分

曲线积分是对曲线上的函数进行积分的概念, 分为两类: 第一型曲线积分 (对弧长) 和第二型曲线积分 (对坐标)。解决曲线、曲面积分, 最重要的就是参数化, 将曲线曲面积分转化为普通的重积分来计算。

### 4.1 第一型曲线积分 (对弧长)

#### 定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

其中  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ 。

**计算:** 若  $L: x = x(t), y = y(t) (t \in [\alpha, \beta])$ , 则

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

**几何意义:** 第一型曲线积分表示曲线上的函数对弧长的积分, 可以理解为给定曲线在某处的密度, 则曲线积分表示沿着曲线的总质量。

## 4.2 第二型曲线积分 (对坐标)

定义

$$\int_L P dx + Q dy = \lim \sum (P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i).$$

与方向有关: 反向时积分变号。

**计算:** 参数化后直接代入:

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt.$$

**几何意义:** 第二型曲线积分表示一个向量场  $\mathbf{F} = (P, Q)$  沿着曲线  $L$  的流量或功率。可以理解为在曲线上每个点的向量场对曲线切向的分量的积分。

## 4.3 两类曲线积分的联系

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds,$$

其中  $(\cos \alpha, \cos \beta)$  为曲线切向的方向余弦。

习题

1. 计算  $\int_L (x^2 + 2xy) ds$ , 其中  $L$  是  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  和  $x + y + z = 3$  的交线。
2. 计算  $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的正向 (逆时针) 一周。

# 5 曲面积分

约定

我们约定曲面的侧: 上侧为法向量与  $z$  轴成锐角的侧, 下册为与  $z$  轴成钝角的侧。相同地, 有前侧, 后侧, 左侧, 右侧。

同时, 约定曲面的内侧, 外侧: 闭合曲面的内侧、外侧就由包含的几何体定义。我们约定, 不额外说明的情况下, 法向量均指向外侧。

## 5.1 第一型曲面积分 (对面积)

定义

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

计算: 若  $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (x, y) \in D$ , 则

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\| du dv.$$

几何意义: 第一型曲面积分表示曲面上的函数对面积的积分, 可以理解为给定曲面在某处的密度, 则曲面积分表示沿着曲面的总质量。

### 5.2 第二型曲面积分 (对坐标)

$$\iint_S P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dx dy,$$

其值依赖于曲面的侧 (通常取外侧为正)。计算公式:

$$\iint_S P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dx dy = \iint_S \vec{V} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \, dS$$

其中  $V = (P, Q, R), \vec{n}$  为法向量。正负号由曲面的侧决定。

如何计算法向量?

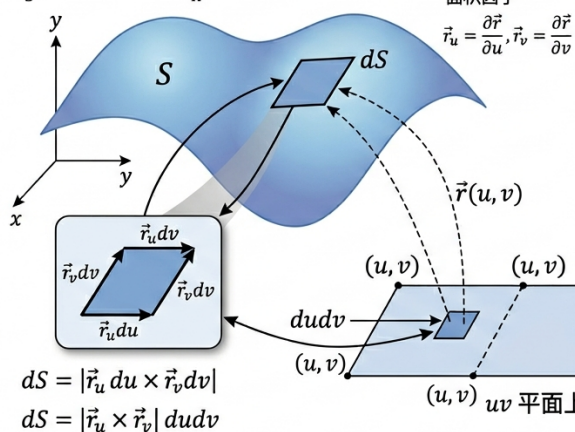
- 对于参数形式  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ , 法向量为  $(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)})$
- 对于隐函数形式  $F(x, y, z) = 0$ , 法向量为  $(F'_x, F'_y, F'_z)$
- 对于隐函数形式  $z = z(x, y)$ , 法向量为  $(z'_x, z'_y, -1)$

几何意义: 第二型曲面积分表示一个向量场  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  穿过曲面  $S$  的通量。可以理解为在曲面上每个点的向量场对曲面法向的分量的积分。

#### 第一类曲面积分: 曲面积

叉积的模  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$  是面积缩放因子 (拉伸因子), 它将  $uv$  平面上的微元  $du \, dv$  缩放到实际曲面积元  $dS$ 。

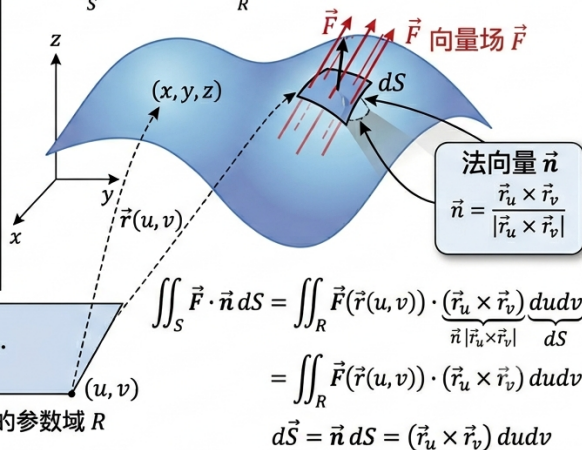
$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \underbrace{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}_{\text{面积因子}} \, du \, dv$$



#### 第二类曲面积分: 通量

非归一化的叉积  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  既定义了曲面积元  $dS$ , 也定义了法向量方向  $\vec{n}$ 。

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv$$



#### 习题

1. 计算  $\iint_S z \, dS$ , 其中  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 \leq 1$  所截下的部分。
2. 计算  $\iint_S x \, dydz$ , 其中  $S$  是椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的上半部分 ( $z \geq 0$ ), 取外侧 (即法向量指向外侧)。

## 6 三大积分公式

一般情况下，直接计算曲线、曲面积分是比计算重积分要难、且不直观的。有没有办法把他们联系起来？

### 6.1 Green 公式（平面）

定理

设  $D$  为平面有界闭区域，边界  $L$  分段光滑且取正向， $P, Q$  在  $D$  上有一阶连续偏导，则

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Green 公式的适用条件： $P, Q$  在  $D$  上有一阶连续偏导，且  $L$  是  $D$  的边界， $L$  分段光滑且取正向（区域在左侧）。如果  $L$  内部存在奇点，则不满足连续可微条件，Green 公式不适用！下面的例题就能很好说明这个问题：

小贴士

1. 其中， $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  表示向量场  $\mathbf{F} = (P, Q)$  的旋度。为什么叫作旋度呢？
2. 如果  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ 。在这种情况下， $\mathbf{F}$  可以表示为某个标量函数的梯度，即  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ 。因此，无旋场的线积分与路径无关，只取决于起点和终点！这就是全微分。

例题

计算  $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ ， $L$  为绕原点一周的简单闭曲线。解：取  $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ， $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ，在包含原点的区域内  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ ，但  $L$  内部不满足连续可微条件。直接参数化  $L: x = \cos\theta, y = \sin\theta$  得  $I = 2\pi$ 。

### 6.2 Gauss 公式

定理

设空间区域  $V$  由分片光滑闭曲面  $S$  所围，取外侧， $P, Q, R$  在  $V$  上有一阶连续偏导，则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

例题

计算  $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy$ ，其中  $S$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧。

解：由 Gauss 公式，

$$I = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV = 3 \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

利用球坐标， $\iiint r^2 \cdot r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta = \frac{4\pi}{5}$ ，故  $I = \frac{12\pi}{5}$ 。

小贴士

其中， $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  表示向量场  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  的散度。为什么叫作散度呢？

## 6.3 Stokes 公式

## 定理

设  $S$  是以分段光滑曲线  $L$  为边界的双侧曲面,  $P, Q, R$  有一阶连续偏导, 则

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

等价形式:  $\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ .

## 习题

1.

$$I = \oint_L (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy,$$

其中  $L$  是上半圆  $y = \sqrt{1-x^2}$  从  $A(1,0)$  到  $B(-1,0)$  再沿  $x$  轴返回  $A$  所围成的闭曲线 (正向为逆时针方向)。

2.

$$I = \iint_S (x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy),$$

其中  $S$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧。

3.

$$I = \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

其中  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线, 方向从  $z$  轴正向看去为逆时针。

## 7 含参量积分

## 7.1 正常含参积分

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy.$$

连续性、可微性、可积性定理 (积分号下求导、交换次序):

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x} dy.$$

## 例题

求  $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$  ( $b > a > 0$ )。

解: 利用  $\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ , 交换积分次序得

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

## 7.2 Leibneiz 积分公式

$$\frac{d}{dx} \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy = \int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(x, d(x))d'(x) - f(x, c(x))c'(x).$$