数分 (H) 辅学

——期末复习

作者：强数 2401-应凯诚
组织：数学科学学院
时间：2026.6.10

ElegantLaTeX Program

目录

第 1 章 级数

1.1 级数的基本概念与性质

1.1.1 定义与性质

对于无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$，我们关注其是否收敛。

定义 1.1

设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 为级数的前 n 项部分和。

- 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$（有限数），则称级数收敛，和为 S。
- 若极限不存在或为 ∞，则称级数发散。

定理 1.1 (必要条件)

若级数 $\sum u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。反之不一定成立（如调和级数）。

定理 1.2 (Cauchy 收敛准则)

级数 $\sum u_n$ 收敛 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$，有：

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$$

定义 1.2 (组合级数)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个组合级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加括号得到，即

$$v_k = u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}$$

定理 1.3

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其组合级数收敛到同一个值。

1.1.2 常见级数示例

- **几何级数** $\sum aq^{n-1}$：当 $|q| < 1$ 时收敛至 $\frac{a}{1-q}$；当 $|q| \geq 1$ 时发散。
- **调和级数** $\sum \frac{1}{n}$：发散。可以通过 Cauchy 准则证明 $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$。
- **Basel 问题**：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。欧拉通过 $\frac{\sin x}{x}$ 的无穷乘积展开给出了著名的证明。

定理 1.4 (Basel 问题)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

证明 欧拉给出了如下证明 (暂时忽略这背后的严谨性)

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2})$$

比较两边 x^2 系数可知

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

即可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

笔记 后面我们也可以用傅里叶分析的方法证明。

例题 1.1 已知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

(1) 求 $f'(x)$ 的表达式。

(2) 证明：

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad (0 < x < 1).$$

例题 1.2 记

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \qquad u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

(1) 证明：当 $n \geq 2$ 时，有 $0 < a_n < 1 + \ln n$; (2) 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，并求其和。

1.2 正项级数的判别法

对于 $u_n \geq 0$ 的级数，收敛的充要条件是部分和序列 $\{S_n\}$ 有界。

定理 1.5

设 $u_n, v_n \geq 0$：

1. 若 $u_n \leq v_n$ 且 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛。
2. 极限形式：若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$。
   - $0 < l < \infty$：二者同敛散。
   - $l = 0$：$\sum v_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ 收敛。
   - $l = \infty$：$\sum v_n$ 发散 $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ 发散。

♡

例题 1.3 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则对于 $p > \frac{1}{2}$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛。

定理 1.6 (比值法 (d'Alembert) 与根值法 (Cauchy))

设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = r$：

- $r < 1$：收敛。
- $r > 1$：发散。
- $r = 1$：失效（需进一步判别）。

♡

定理 1.7 (比值比较法)

设 $u_n > 0, v_n > 0$，若存在正整数 N，使得对所有 $n \geq N$ 都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

则：

- 若 $\sum v_n < \infty$ (收敛)，则 $\sum u_n$ 收敛。
- 若 $\sum u_n = \infty$ (发散)，则 $\sum v_n$ 发散。

♡

1.3 进阶判别法

定理 1.8 (积分判别法)

若 $f(x)$ 在 $[1, \infty)$ 上非负且单调递减，则级数 $\sum f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 同敛散。

♡

例题 1.4 ***p*-级数** $\sum \frac{1}{n^p}$：$p > 1$ 收敛，$p \leq 1$ 发散。

例题 1.5 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$:$p > 1$ 收敛，$p \leq 1$ 发散。

例题 1.6 设 $0 < p < 1, a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^p}, n = 1, 2, \cdots$,，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

定理 1.9 (Raabe 判别法)

设 $R_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$，若 $\lim_{n\to\infty} R_n = r$：

- $r > 1$：收敛。
- $r < 1$：发散。

♡

推论 1.1 (Raabe 判别法极限形式)

设 $u_n > 0$，若 $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r$。

- $r > 1 \implies \sum u_n$ 收敛。
- $r < 1 \implies \sum u_n$ 发散。

例题 1.7 判断 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$ 的敛散性。

解法 (Raabe 法)： 记 $u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$，则

$$\begin{aligned}
R_n &= n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{2n+1} - 1\right) \\
&= n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) \\
&= n\left(\frac{4n^2+10n+6-(4n^2+4n+1)}{(2n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

取极限 $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$，故级数收敛。

解法 (不等式放缩)： $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$，得到 $(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!})^2 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2n+1}$，$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，故：

$$u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^{3/2}} \sim O(n^{-3/2})$$

由于 $p = \frac{3}{2} > 1$，p-级数收敛，故原级数收敛。

例题 1.8 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{1/2})(2-x^{1/3})\cdots(2-x^{1/n})$ 的敛散性 $(x > 0)$。

解： 记一般项为 u_n，考察比值：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2-x^{1/(n+1)}}$$

利用 Raabe 判别法计算极限：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x^{1/(n+1)}-1}{2-x^{1/(n+1)}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-x^{1/(n+1)}} \cdot \frac{x^{1/(n+1)}-1}{1/n} \\
&= 1 \cdot \ln x = \ln x
\end{aligned}$$

由 Raabe 判别法：

- 若 $\ln x > 1 \implies x > e$，级数收敛。
- 若 $\ln x < 1 \implies x < e$，级数发散。

当 $x = e$ 时，Raabe 判别法失效。此时将比值进行 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{1}{2-e^{1/(n+1)}} = \frac{1}{1-(e^{1/(n+1)}-1)} \\
&= 1 + (e^{1/(n+1)}-1) + (e^{1/(n+1)}-1)^2 + \cdots \\
&= 1 + \left(\frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

对照 Gauss 判别法形式，此时 $\lambda = 1 \leq 1$，因此级数当 $x = e$ 时发散。

定理 1.10 (Gauss 判别法—一般情形)

设 $u_n > 0$，若能展开为：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\nu}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

- 若 $\nu > 1$，则 $\sum u_n$ 收敛。
- 若 $\nu \leq 1$，则 $\sum u_n$ 发散。

♡

推论 1.2 (Gauss 判别法特殊形式)

设 $u_n > 0$，若：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- 若 $\lambda > 1$，级数收敛。
- 若 $\lambda \leq 1$，级数发散。

♡

笔记 以上判别法均可视为比值比较判别法，若再考虑

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p} \cdots$$

等比较级数，可得到更精细的判别，但实际一般用得不多。所以，我们需要熟悉的是常见正项级数的阶。并且，使用特定比较级数得到的比较判别法能力总是有限的，如下定理告诉我们，不存在万能的比较级数。

定理 1.11

1. (Du Bois-Reymond) 给定收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，一定存在收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
2. (Abel) 给定发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，一定存在发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

♡

1.4 变号级数

定义 1.3

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$，称级数 $\sum u_n$ 绝对收敛 (A.C)。
2. 若 $\sum u_n$ 收敛，而 $\sum |u_n| = \infty$，称其为 条件收敛 (C.C)。
3. 形如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ (其中 $u_n \geq 0$) 的级数称为 交错级数。

♣

定理 1.12 (Leibniz 判别法)

若 $\{u_n\}$ 单调递减趋于 0，则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛。

♡

证明 [证明概述] 考察部分和 S_n：

$$S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n-1} - u_{2n} \geq 0$$

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -u_{2n} + u_{2n+1} \leq 0$$

且 $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$。故 S_{2n} 单调递增且有上界，故 S_{2n} 收敛。同理可证 S_{2n+1} 收敛，且 $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \to 0$，故 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。

例题 1.9 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性。

- 当 $p > 1$ 时，绝对收敛。
- 当 $0 < p \leq 1$ 时，条件收敛。

1.4.1 Abel 变换与判别法

Abel 求和公式 (分部求和法)：设 $S=\sum_{k=1}^{m} a_k b_k$，记 $B_j=\sum_{k=1}^{j} b_k$ 且 $B_0=0$。则：

$$S=a_m B_m+\sum_{k=1}^{m-1} B_k(a_k-a_{k+1})$$

引理 1.1 (Abel 引理)

若满足：$\{a_k\}$ 单调；$\{B_k\}$ 有界，即 $\exists M>0, |B_k|\le M$。则 $|S|\le M(|a_1|+2|a_m|)$。♡

证明 $|S|\le |a_m B_m|+\sum_{k=1}^{m-1}|B_k||a_k-a_{k+1}|\le M\left(|a_m|+\sum_{k=1}^{m-1}|a_k-a_{k+1}|\right)$。因 a_k 单调，$\sum|a_k-a_{k+1}|=|a_1-a_m|$，故结论成立。

定理 1.13 (Abel 判别法)

若 $\sum b_n$ 收敛，且数列 $\{a_n\}$ 单调有界，则 $\sum a_n b_n$ 收敛。♡

定理 1.14 (Dirichlet 判别法)

若 $\sum b_n$ 的部分和 B_n 有界，数列 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$，则 $\sum a_n b_n$ 收敛。♡

例题 1.10 判断级数 $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)(3-\arctan n)$ 的敛散性。

- 由 Leibniz 判别法，$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛。
- 由 Abel 判别法，因 $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 单调有界，$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 收敛。
- 再次使用 Abel 判别法，因 $(3-\arctan n)$ 单调有界，故原级数收敛。

例题 1.11 数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 当 $x\ne k\pi$ 时条件收敛

例题 1.12 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x^{2025}}\,dx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{1+n^2}$ 的收敛性。

1.5 收敛变号级数的性质

定义 1.4

记 $u_n^+=\begin{cases}u_n, & u_n\ge 0\\ 0, & u_n<0\end{cases}$，及 $u_n^-=\begin{cases}-u_n, & u_n\le 0\\ 0, & u_n>0\end{cases}$。

u_n^+ 和 u_n^- 均为正项级数，分别称为 $\sum u_n$ 的正部和负部。显然有 $u_n=u_n^+-u_n^-$，且 $|u_n|=u_n^++u_n^-$。♣

定理 1.15

1. 若 $\sum u_n$ A.C.，则 $\sum u_n^+$ 与 $\sum u_n^-$ 皆收敛。
2. 若 $\sum u_n$ C.C.，则 $\sum u_n^+$ 与 $\sum u_n^-$ 皆发散。

♡

证明 利用 $0\le u_n^\pm\le|u_n|$，若绝对收敛，由比较判别法知正部负部均收敛；若条件收敛，由于 $u_n^++u_n^-=|u_n|$ 发散且 $u_n^+-u_n^-=u_n$ 收敛，正负部必须同时发散。

定理 1.16

若 $\sum u_n$ A.C.，则其任意重排级数也绝对收敛，且和不变。♡

定理 1.17 (Riemann 重排定理)

若 $\sum u_n$ 条件收敛 (C.C.)，则对任意实数 $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$，必存在 $\sum u_n$ 的一种重排 $\sum v_n$，使得 $\sum v_n=\alpha$。♡

例题 1.13 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^+}{\sum_{k=1}^{n} a_k^-}=1$$

例题 1.14 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ 收敛。(Hint: 利用重排)

1.6 其他判别法

定理 1.18 (Cauchy 凝聚判别法)

$\{u_n\}$ 是单调减少的正数，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是凝聚项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$$

收敛

例题 1.15 设 $\{a_n\}$ 为单调减少的正数列。

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛。

(2) 若 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\rho$，证明当 $\rho<\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，当 $\rho>\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

定理 1.19 (Sapagof 判别法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 S_n，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 同敛散

定理 1.20 (对数判别法)

1. 对正项级数 $\sum u_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=r$$

，则当 $r>1$ 时级数收敛，$r<1$ 时级数发散。

2. 对正项级数 $\sum u_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{nu_n}}{\ln\ln n}=r$$

，则当 $r>1$ 时级数收敛，$r<1$ 时级数发散。

第 1 章 练习

1. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛。
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，S_n 为其部分和序列，$p>1$, 证明：无论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛与否，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 总是收敛的。
3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其余项为 $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, n=0,1,\cdots$. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}}$ 发散, 但对任意 $p>0$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{{R_{n-1}}^{1-p}}$ 收敛。

第 2 章 函数项级数

本章讨论形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

的级数，其中每一项 u_n 都是定义在同一集合 $X \subset \mathbb{R}$ 上的函数。与数项级数相比，函数项级数的核心问题不仅是“对每个固定的 x 是否收敛”，还要研究收敛是否足够均匀，以便保证连续性、可积性、可微性等运算可以逐项进行。

2.1 函数项级数与点态收敛

定义 2.1 (函数项级数与部分和)

设 $X \subset \mathbb{R}$，$u_n : X \to \mathbb{R}$。称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

为定义在 X 上的函数项级数。它的第 n 个部分和函数记为

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

♣

定义 2.2 (收敛点、收敛域与和函数)

设 $x_0 \in X$。若数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

收敛，则称函数项级数在 x_0 处收敛；若发散，则称它在 x_0 处发散。

所有收敛点组成的集合称为该函数项级数的收敛域。若级数在 $A \subset X$ 上每一点均收敛，则可定义和函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad x \in A.$$

此时也称 $S_n(x) \to S(x)$ 在 A 上逐点收敛。

♣

例题 2.1 几何级数 考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

当 $x \neq 1$ 时，

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

因此当 $|x| < 1$ 时，

$$S_n(x) \to \frac{1}{1 - x}.$$

当 $|x| \geq 1$ 时，级数不收敛。因此收敛域为 $(-1, 1)$，和函数为

$$S(x) = \frac{1}{1 - x}, \qquad |x| < 1.$$

例题 2.2 连续项的逐点极限可不连续 在 $[0, 1]$ 上定义

$$u_1(x) = x, \qquad u_n(x) = x^n - x^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

则

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=x^n.$$

于是

$$S_n(x)\to S(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

每个 u_n 都连续，但和函数 S 在 $x=1$ 处不连续。这说明逐点收敛不足以保持连续性。

例题 2.3 逐点极限下积分不可直接换序 在 $[0,\pi]$ 上定义

$$S_n(x)=\begin{cases}n\sin(nx), & 0\le x\le \dfrac{\pi}{n},\\ 0, & \dfrac{\pi}{n}<x\le\pi.\end{cases}$$

则每个 S_n 连续，且对每个固定 $x\in[0,\pi]$ 都有 $S_n(x)\to 0$。但是

$$\int_0^{\pi}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/n}n\sin(nx)\,\mathrm{d}x=2.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}S_n(x)\,\mathrm{d}x=2\ne\int_0^{\pi}\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

若令 $u_1=S_1$，$u_n=S_n-S_{n-1}$，便得到一个函数项级数，其部分和为上述 S_n。该例说明：仅有逐点收敛时，一般不能把极限号移入积分号。

2.2 一致收敛

定义 2.3 (函数列的一致收敛)

设 $S_n:X\to\mathbb{R}$，$S:X\to\mathbb{R}$。若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，对所有 $x\in X$ 均有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,$$

则称 S_n 在 X 上一致收敛于 S，记为

$$S_n\rightrightarrows S\quad 于X.$$

♣

定义 2.4 (一致范数判别)

对有界函数 $f:X\to\mathbb{R}$，记

$$\|f\|_X=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

则

$$S_n\rightrightarrows S\quad 于X\quad\Longleftrightarrow\quad \|S_n-S\|_X\to 0.$$

♣

定义 2.5 (函数项级数的一致收敛)

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

在 X 上一致收敛于某个函数 S，则称该函数项级数在 X 上一致收敛，并写作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\rightrightarrows S(x)\quad 于X.$$

♣

例题 2.4 在无界区间上的一致收敛 令

$$S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

对 $x \neq 0$，$S_n(x) \to 0$，且 $x=0$ 时也有 $S_n(0)=0$。另一方面，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2n}.$$

因此

$$\|S_n\|_{\mathbb{R}} \to 0,$$

即 $S_n \rightrightarrows 0$ 于 $\mathbb{R}$。

例题 2.5 同一函数列在不同区间上一致性不同 令

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

在 $X_1=[0,1]$ 上，虽然 $S_n(x)\to 0$，但

$$S_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

故不可能一致收敛于 0。

在 $X_2=[1,2]$ 上，

$$0 \le \frac{nx}{1+n^2x^2} \le \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \le \frac{1}{n},$$

所以 $S_n \rightrightarrows 0$ 于 $[1,2]$。

2.3 一致收敛的判别法

定理 2.1 (Cauchy 一致收敛准则)

函数列 $S_n : X \to \mathbb{R}$ 在 X 上一致收敛的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，对任意 $p\in\mathbb{N}$ 与任意 $x\in X$，都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

♡

证明 必要性由

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)|$$

直接得到。

充分性可看作实数完备性的函数版。由条件知，对每个固定 $x\in X$，数列 $\{S_n(x)\}$ 是 Cauchy 列，故存在极限，记为 $S(x)$。再令 $p\to\infty$，即可由

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

推出

$$|S(x) - S_n(x)| \le \varepsilon$$

对所有 $x\in X$ 成立，从而 $S_n \rightrightarrows S$。

推论 2.1 (函数项级数的 Cauchy 准则)

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 X 上一致收敛的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，对任意 $p\in\mathbb{N}$ 与任意 $x\in X$，都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

♡

定理 2.2 (Weierstrass M 判别法)

设存在非负数列 $\{M_n\}$，使得

$$|u_n(x)| \le M_n, \qquad \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛。则函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 X 上一致收敛。

证明 由数项级数 $\sum M_n$ 的 Cauchy 准则，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得当 $n > N$ 时，对任意 $p \in \mathbb{N}$，

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

于是对所有 $x \in X$，

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

由函数项级数的 Cauchy 准则，$\sum u_n$ 在 X 上一致收敛。

2.4 Dini 定理、Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

定理 2.3 (Dini 定理)

设 $f_n, f \in C([a,b])$。若对每个 $x \in [a,b]$，数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 单调，且

$$f_n(x) \to f(x), \qquad x \in [a,b],$$

则

$$f_n \rightrightarrows f \quad 于[a,b].$$

证明 只证明 $f_n(x)$ 单调递增的情形，递减情形类似。令

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x).$$

则 $g_n \in C([a,b])$，$g_n(x) \ge 0$，且 $g_n(x)$ 关于 n 单调递减并逐点趋于 0。

反设不一致收敛，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，以及 $n_k \to \infty$ 和 $x_k \in [a,b]$，使得

$$g_{n_k}(x_k) \ge \varepsilon_0.$$

由 $[a,b]$ 紧性，可取子列仍记为 x_k，使 $x_k \to x_0 \in [a,b]$。因 $g_N(x_0) \to 0$，可取 N 使 $g_N(x_0) < \varepsilon_0/2$。由 g_N 连续，k 足够大时

$$g_N(x_k) < \varepsilon_0.$$

同时 $n_k \ge N$，由单调性得

$$g_{n_k}(x_k) \le g_N(x_k) < \varepsilon_0,$$

矛盾。

推论 2.2 (非负连续项级数的 Dini 判别)

若 $u_n \in C([a,b])$，$u_n(x) \ge 0$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

在 $[a,b]$ 上逐点收敛，且 $S \in C([a,b])$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛。

引理 2.1 (Abel 变换)

设 $m \le n$。令

$$B_k(x) = \sum_{j=m}^{k} b_j(x), \qquad m \le k \le n.$$

则

$$\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x) = a_n(x)B_n(x) + \sum_{k=m}^{n-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)B_k(x).$$

定理 2.4 (Abel 一致收敛判别法)

设对每个 $x \in X$，$\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调，并且存在 $M > 0$ 使

$$|a_n(x)| \le M, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X.$$

若

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

在 X 上一致收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

在 X 上一致收敛。

证明 由 $\sum b_n$ 一致收敛，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得当 $m > N$ 时，对任意 $n \ge m$ 与任意 $x \in X$，

$$\left|\sum_{j=m}^{k} b_j(x)\right| < \varepsilon, \qquad m \le k \le n.$$

由 Abel 变换及 $\{a_k(x)\}$ 的单调性，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| &\le |a_n(x)|\,|B_n(x)| + \sum_{k=m}^{n-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)|\,|B_k(x)| \\ &\le M\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=m}^{n-1} |a_k(x) - a_{k+1}(x)| \\ &\le 3M\varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则可得结论。

定理 2.5 (Dirichlet 一致收敛判别法)

设对每个 $x \in X$，$\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调，且

$$a_n(x) \rightrightarrows 0 \quad 于 X.$$

若部分和

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$$

在 X 上一致有界，即存在 $M > 0$，使得

$$|B_n(x)| \le M, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

在 X 上一致收敛。

证明 对尾和使用 Abel 变换。设

$$B_{m,k}(x) = \sum_{j=m}^{k} b_j(x).$$

由部分和一致有界可得

$$|B_{m,k}(x)| \le |B_k(x)| + |B_{m-1}(x)| \le 2M.$$

又因 $a_n \rightrightarrows 0$，当 m 充分大时，$\sup_{x\in X} |a_m(x)|$ 任意小。结合 Abel 变换与单调性，尾和

$$\sum_{k=m}^{n} a_k(x) b_k(x)$$

可被一致地控制为任意小。因此由 Cauchy 准则，级数一致收敛。

定义 2.6 (广义一致收敛，也称内闭一致收敛)

设 I 是区间。若函数列 f_n 在任意闭区间 $[a, b] \subset I$ 上一致收敛，则称 f_n 在 I 上广义一致收敛或局部一致收敛。函数项级数的广义一致收敛同理定义。

例题 2.6 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛，其中 $0 < \delta < \pi$。事实上，

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

而当 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 时，分母离 0 有正距离，所以部分和一致有界；又 $1/n \to 0$，由 Dirichlet 判别法知一致收敛。

因此该级数在 $(0, 2\pi)$ 上广义一致收敛。但它在 $[0, 2\pi]$ 上不是一致收敛；事实上其和函数在端点附近不连续。

2.5 绝对一致收敛

定义 2.7 (绝对一致收敛)

若

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

在 X 上一致收敛，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 X 上绝对一致收敛。

命题 2.1

绝对一致收敛必推出一致收敛。

证明 由

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)|$$

和 Cauchy 准则立即得到。

注 “对每个 x 绝对收敛并且原级数一致收敛”并不等价于“绝对一致收敛”。下面的例子说明两者差别。

例题 2.7 一致且逐点绝对收敛，但非绝对一致收敛 在 $[0,1]$ 上考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n.$$

令 $a_n(x)=(1-x)x^n$。对每个固定 $x\in[0,1]$，$a_n(x)$ 关于 n 单调递减到 0，且

$$\sup_{x\in[0,1]} a_n(x)\to 0.$$

由一致的 Leibniz 判别法，原级数一致收敛。

另一方面，绝对值级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n.$$

其部分和为

$$T_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(1-x)x^n=1-x^{N+1}.$$

当 $0\le x<1$ 时，$T_N(x)\to 1$；当 $x=1$ 时，$T_N(1)=0$。故极限函数为

$$T(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

不连续。由于每个 T_N 连续，若 T_N 一致收敛，则极限应连续，矛盾。因此该级数不是绝对一致收敛。

2.6 一致收敛与极限运算

2.6.1 连续性

定理 2.6 (一致极限保持连续性)

设 $f_n\in C(I)$，且

$$f_n \rightrightarrows f$$

在区间 I 上成立，则 $f\in C(I)$。若只在任意闭区间 $[a,b]\subset I$ 上一致收敛，则仍有 $f\in C(I)$。

证明 任取 $x_0\in I$。给定 $\varepsilon>0$，由一致收敛，取 N 使

$$|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad x\in I.$$

由 f_N 在 x_0 处连续，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f_N(x)-f_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\le |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 f 在 x_0 连续。

推论 2.3 (连续函数项级数的和函数)
若 $u_n \in C(I)$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 I 上一致收敛，则其和函数 S 连续。若级数在 I 上广义一致收敛，则 $S \in C(I)$。♡

2.6.2 逐项积分

定理 2.7 (一致收敛与积分换序)
设 $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$，且

$$f_n \rightrightarrows f \quad 于 [a,b].$$

则 $f \in \mathcal{R}([a,b])$，并且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，若 $f_n \in C([a,b])$，则结论成立。♡

证明 先说明积分极限。由一致收敛，

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le (b-a)\,\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0.$$

至于 f 的 Riemann 可积性，可由上、下和刻画证明：取 n 使 $\|f_n - f\|$ 足够小，再取分割 P 使 $U(f_n,P)-L(f_n,P)$ 足够小，则 $U(f,P)-L(f,P)$ 也可任意小。

推论 2.4 (函数项级数的逐项积分)
设 $u_n \in \mathcal{R}([a,b])$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$。则

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

♡

2.6.3 逐项求导

定理 2.8 (一致收敛与求导换序)
设 I 为区间，$f_n \in C^1(I)$。若存在 $x_0 \in I$，使数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，并且

$$f_n' \rightrightarrows g$$

在 I 的任意闭子区间上一致成立，则 f_n 在 I 上广义一致收敛于某个函数 f，且

$$f \in C^1(I), \qquad f'(x) = g(x).$$

若已知 $f_n(x) \to f(x)$，则

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

♡

证明 任取闭区间 $[a,b]\subset I$，并取一个包含 $[a,b]$ 与 x_0 的闭区间 $J\subset I$。由微积分基本定理，

$$f_n(x)-f_n(x_0)=\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t,\qquad x\in J.$$

令 $n\to\infty$。由于 $f_n(x_0)$ 收敛，且 f_n' 在 J 上一致收敛到 g，得到

$$f(x)=L+\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,\qquad L=\lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

同时收敛在 $[a,b]$ 上是一致的。于是 $f\in C^1(I)$，且 $f'=g$。

推论 2.5 (函数项级数的逐项求导)

设 $u_n\in C^1(I)$。若存在 $x_0\in I$，使数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

在 I 上广义一致收敛，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 I 上广义一致收敛，且 $S\in C^1(I)$，并有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

♡

例题 2.8Riemann zeta 函数在 $(1,+\infty)$ 上光滑 定义

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},\qquad x>1.$$

对任意闭区间 $[a,b]\subset(1,+\infty)$，有 $a>1$，且

$$\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^a}.$$

由 M 判别法，级数在 $[a,b]$ 上一致收敛，因此 $\zeta\in C((1,+\infty))$。

又

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)'=-\frac{\ln n}{n^x},$$

并且

$$\left|\frac{\ln n}{n^x}\right|\le\frac{\ln n}{n^a},\qquad x\in[a,b].$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$ 收敛，导数级数在 $[a,b]$ 上一致收敛。因此

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}.$$

同理可得

$$\zeta^{(m)}(x)=(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^m}{n^x},\qquad x>1,$$

故 $\zeta\in C^\infty((1,+\infty))$。

例题 2.9 连续但处处不可导函数的一个构造 令

$$\varphi(x)=\operatorname{dist}(x,\mathbb{Z})=\min_{k\in\mathbb{Z}}|x-k|.$$

这是一个连续的 1 周期函数，并且在每个区间 $[k, k+\frac{1}{2}]$ 与 $[k+\frac{1}{2}, k+1]$ 上分别为斜率 1 与 -1 的线性函数。

定义 Takagi 型函数

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\varphi(2^n x).$$

因为

$$0 \le 2^{-n}\varphi(2^n x) \le 2^{-n-1},$$

由 M 判别法，级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，所以 $T \in C(\mathbb{R})$。

另一方面，对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$，取包含 x_0 的二进制小区间的端点序列 $x_m \to x_0$。在这些小区间上，前 m 项的差商分别贡献 ± 1，而尾项的贡献可用一致估计控制。由二进制展开的符号变化可知，差商

$$\frac{T(x_m) - T(x_0)}{x_m - x_0}$$

不可能收敛。因此 T 在任意点都不可导。该例说明：一致极限能够保持连续性，但一般不能保持可导性；逐项求导需要额外的一致收敛条件。

2.7 本章小结

1. 点态收敛只说明每个固定 x 上的数项级数收敛，不能保证连续性、积分换序或求导换序。
2. 一致收敛的本质是误差估计中的 N 与 x 无关。
3. Cauchy 准则是处理一致收敛的基础；M 判别法是最常用的充分条件。
4. Dini 定理利用紧性和单调性，将逐点收敛提升为一致收敛。
5. Abel 判别法和 Dirichlet 判别法适合处理含参数的振荡型级数。
6. 一致收敛保持连续性；一致收敛还允许逐项积分；逐项求导则通常要求导数级数一致收敛并在一点收敛。

第 2 章 练习

1. 以下命题正确的是
   (a). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $[0, \pi]$ 上内闭一致收敛.
   (b). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $[0, \pi]$ 上一致收敛.
   (c). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上某个连续函数的 Fourier 级数.
   (d). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ 在 $(0, \pi)$ 上内闭一致收敛.

第 3 章 幂级数与 Taylor 级数

3.1 幂级数的基本概念

定义 3.1 (幂级数)

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

的无穷级数称为以 x_0 为中心的幂级数。♣

问题：幂级数的收敛域如何确定？

记 $r = \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,+\infty]$，令

$$R = \begin{cases} +\infty & r = 0 \\ \frac{1}{r} & 0 < r < +\infty \\ 0 & r = +\infty \end{cases}$$

定理 3.1 (Cauchy-Hadamard)

对于幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$：

1. 当 $R = +\infty$ 时，该幂级数在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛；
2. 当 $0 < R < +\infty$ 时，该幂级数在 (x_0-R, x_0+R) 上绝对收敛，在 $\mathbb{R} \setminus [x_0-R, x_0+R]$ 上发散；
3. 当 $R = 0$ 时，该幂级数仅在 x_0 处收敛。

♡

定义 3.2 (收敛半径)

上述定理中的 R 称为幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径。♣

例题 3.1 当收敛半径 $R=1$ 时，收敛区间的不同边界情况示例：

1. $\sum x^n$，收敛域为 $(-1,1)$；
2. $\sum \frac{x^n}{n}$，收敛域为 $[-1,1)$；
3. $\sum \frac{x^n}{n^2}$，收敛域为 $[-1,1]$。

例题 3.2 设

$$a_n = \frac{3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-5)(4n-1)}{5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)(4n+1)}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

求幂级数 $x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{4n+1}$ 的收敛半径和收敛域。

定理 3.2

若极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in [0,+\infty]$ 存在，则收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$（约定 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$）。♡

注 关于极限之间的不等式关系：

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

例题 3.3 求下列幂级数的收敛半径：

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) x^n$

例题 3.4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$ 收敛半径与收敛域。

3.2 幂级数的核心性质

定理 3.3 (广义一致收敛性)

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛区间为 I，且 $I \neq \{x_0\}$，则它在 I 上内闭一致收敛（广义一致收敛）。

证明 任取闭区间 $[a,b] \subset I$，只需证级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。我们可做如下恒等变形：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-x_0)^n \cdot \left(\frac{x-x_0}{b-x_0}\right)^n$$

由于常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-x_0)^n$ 收敛（因其在收敛域内），故一致收敛；而函数列 $\left\{\left(\frac{x-x_0}{b-x_0}\right)^n\right\}$ 在 $x \in [a,b]$ 上关于 n 单调且一致有界。由 Abel 判别法可知，原级数在 $[a,b]$ 上一致收敛。

定理 3.4 (逐项积分)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 收敛区间为 I，和函数为 $S(x)$。则其在 $\forall [a,b] \subset I$ 上可积，且可以逐项积分：

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n dx$$

进一步地，含有变上限的积分形式为：

$$\int_{x_0}^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n(x-x_0)^{n+1}$$

结论：逐项积分后的新级数，其收敛半径 $R' = R$。

例题 3.5 利用逐项积分性质：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, \quad x \in [-1,1]$$

定理 3.5 (逐项求导)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R>0$，和函数为 $S(x)$ $(x \in I)$。对其逐项求导得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$，其收敛区间设为 $I' \subset I$。则 $S(x)$ 在 I' 上可导，且：

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

推论 3.1 (无穷可导性)

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R>0$，则和函数 $S(x) \in C^{\infty}(x_0-R, x_0+R)$，且存在任意高阶导数：

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

3.3 经典例题与推导

例题 3.6 求以下幂级数的和函数：

1. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$。求导可得：

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$$

积分还原（由连续性及 $S(0)=0$）：

$$S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(x+1),\quad x\in(-1,1]$$

2. 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$。求导可得：

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1)$$

积分还原：

$$S(x)=\arctan x,\quad x\in[-1,1]$$

例题 3.7 计算数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)2^{-n}$ 的和。

解： 原级数可拆分为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)2^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)2^{-n}-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$$

我们先构建相关的辅助幂级数。已知：

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'\quad \text{或写为}\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\left(\frac{2x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1)$$

代入 $x=\frac{1}{2}$，对于第一部分：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\cdot 2^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1-1/2)^3}=\frac{1}{2}\cdot 16=8$$

第二部分为等比级数求和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=1$$

故最终结果为：$8-1=7$。

例题 3.8 幂级数解微分方程 证明幂级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足常微分方程 (ODE) $xy''+y'-y=0$。

解： 易知该级数收敛半径 $R=\infty$，故 $y(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$。逐项求导得：

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2}$$

代入微分方程的左边展开：

$$\begin{aligned}xy''+y'-y&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2}+\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}+\frac{1\cdot x^0}{(1!)^2}\right)-\left(\frac{x^0}{(0!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\right)\end{aligned}$$

化简常数项（x^0 项）：$\frac{1}{(1!)^2}-\frac{1}{(0!)^2}=1-1=0$。

对于 x^{n-1} 项的系数（其中 $n\geq 2$），前两项系数相加为：

$$\frac{n(n-1)}{(n!)^2}+\frac{n}{(n!)^2}=\frac{n^2}{(n!)^2}=\frac{n^2}{n^2\cdot((n-1)!)^2}=\frac{1}{((n-1)!)^2}$$

而第三项中的级数可平移下标，将 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 变为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{((n-1)!)^2}$。因此，各项系数严格抵消为 0，证明完毕。

3.4 Taylor 级数

对于函数 $f(x)$，带有 Peano 余项的 Taylor 展开为：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

思考：为什么在 x_0 处与前 n 阶导数相同的多项式可以用来逼近 $f(x)$？前提是 $f\in C^{\infty}((x_0-\delta,x_0+\delta))$。但是，仅有无穷阶可导并不足以保证 Taylor 级数收敛于自身。

例题 3.9 非解析的光滑函数 构造如下函数：

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

可以证明 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 且在 $x=0$ 处的所有导数均为 0。其 Taylor 级数恒为 0，但在 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$。

问题：何时 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 成立？

回答：设 $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 为 Taylor 余项，当且仅当 $R_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$ 时成立。

定理 3.6

若函数列 $\{f^{(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在邻域 $N(x_0,\delta)$ 上一致有界，则：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in N(x_0,\delta)$$

证明 由题意，$\exists M>0$，使得 $\forall n\in\mathbb{N}$ 及 $\forall x\in N(x_0,\delta)$，均有 $|f^{(n)}(x)|\leq M$。利用 Lagrange 余项：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leq M\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}=0$，故 $|R_n(x)|\to 0$。

例题 3.10 1. 设 $f(x)=e^x$，则 $f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1$。对于 $\forall\delta>0, x\in N(0,\delta)$，有 $|f^{(n)}(x)|\leq e^{\delta}$（一致有界）。因此 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R})$。

2. 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$。显然 $|f^{(n)}(x)|\leq 1, |g^{(n)}(x)|\leq 1$。因此：

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}$$

例题 3.11 对数函数的展开 展开函数 $\ln(1-x-2x^2)$。

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln((1-2x)(x+1))=\ln(1-2x)+\ln(x+1)$$

$$\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n}\quad\left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(x\in(-1,1])$$

相加合并得：

$$\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$$

收敛区间为公共部分 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。注：若直接对原函数分析其在实数轴的定义域 $(1-2x)(x+1)>0\implies x\in(-1,\frac{1}{2})$，

其几何中心为 $-\frac{1}{4}$。幂级数的收敛区间关于展开点对称。

此外，利用对数展开可得重要级数：

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}, \quad x\in(-1,1)$$

3.5 Stirling 公式与边界收敛性分析

定理 3.7 (Stirling 公式)

当 $n\to\infty$ 时，有：

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0<\theta_n<1$$

证明 [核心推导思路] 构造数列 $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$，考察其比值：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}\cdot\frac{(n+1)^{n+1+1/2}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}}{e}$$

取对数得 $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$。利用 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的展开式，令 $x=\frac{1}{2n+1}$，则 $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{n}$：

$$\begin{aligned}(n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \frac{2n+1}{2}\cdot 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2m+1}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\frac{1}{(2n+1)^{2m}}\end{aligned}$$

显然该级数首项为 1，故 $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>0$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递减。进一步放缩可证：

$$1<(n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)} = 1+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}$$

这表明 $\ln(a_n e^{-\frac{1}{12n}})$ 是单调递增的。结合单调有界定理，$\lim_{n\to\infty}a_n = a$ 存在。最后结合 **Wallis** 公式 $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}\right)$ 可求得极限常数 $a=\sqrt{2\pi}$。

例题 3.12 收敛区间与端点敛散性 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}X^n$ 的收敛区间。

解： 使用达朗贝尔判别法考察系数 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$：

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=4$，故收敛半径 $R=4$，内部收敛域为 $(-4,4)$。

当 $X=4$ 时，考察级数 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ 的通项，利用 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$：

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n \sim \frac{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot 4^n = \frac{2\pi n}{\sqrt{4\pi n}}\cdot\frac{n^{2n}}{(2n)^{2n}}\cdot 4^n = \sqrt{\pi n}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}a_n4^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi n}\neq 0$，通项不趋于零，故在端点 $X=4$ 处发散。同理在 $X=-4$ 处发散。

第 3 章 练习

1. **求下列幂级数的收敛区间:**

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{3n}}{n!}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln(1+n)}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n},\quad (a,b>0)$

2. **求下列级数的和函数:**

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$

3. **求以下级数的和函数:**
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

4. **求常数项级数的和:**
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!+(n+1)!}$$

5. **求常数项级数的和:**
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}$$

6. **求幂级数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ **的收敛域与和函数，并求以下数值级数的和:**
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^n}$$

第 4 章 Fourier 分析

4.1 Fourier 系数

Fourier 级数是一类特殊的三角级数，它的特殊性在于其系数是从某个可积函数出发，经过 Euler-Fourier 公式计算出来的。

4.1.1 Fourier 系数的计算公式

设 f 是以 2π 为周期的函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积（和绝对可积）。计算 f 的 Fourier 系数的 **Euler-Fourier 公式**为：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n=0,1,2,\dots \tag{4.1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n=1,2,\dots \tag{4.2}$$

如果三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 中的系数满足上述公式，则称该三角级数是 f 的 **Fourier 级数**，记为：

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{4.3}$$

注 记号 "$\sim$" 仅表明右边的系数 a_n, b_n 与左边的函数 f 之间满足积分计算关系。公式 (4.3) 右边的级数是否收敛，以及收敛时其和函数是否等于 $f(x)$，需要依赖如 Dirichlet 条件等另行讨论。

命题 4.1

一致收敛的三角级数，必是其和函数的 Fourier 级数。

注

1. **延拓：** 当 f 的定义域是某个长度为 2π 的区间时，可先将其延拓成周期函数再展开。
2. **偶函数 (余弦级数)：** 若 f 为偶函数，则所有 $b_n=0$，且有：
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n=0,1,2,\dots$$
求余弦级数做偶延拓。
3. **奇函数 (正弦级数)：** 若 f 为奇函数，则所有 $a_n=0$，且有：
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n=1,2,\dots$$
求正弦级数做奇延拓。

4.2 Fourier 级数的收敛性

定理 4.1 (Fejer 定理)

如果以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积，并且在点 x_0 处有左、右极限 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$，则 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处在 Cesàro 意义下收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].$$

特别是当 f 于点 x_0 连续时，则 Fourier 级数在点 x_0 的 Cesàro 和就等于 $f(x_0)$。

命题 4.2

设以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积，点 x_0 是 f 的连续点或第一类间断点。如果 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛，则它一定收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].$$

4.2.1 Fourier 系数的几何意义

定义 4.1

称函数列 $\{f_n\}$ 于区间 $[a,b]$ 上平方平均收敛于 f，若成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\,dx=0.$$

Fourier 系数看似纯粹的积分运算，实则有着极深的几何背景。我们将周期为 2π 的可积平方函数集合视为一个**内积空间**。引进正交概念：如果

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx=0$$

就称 f 和 g **正交**。在这个定义下，三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots\}$ 中任意两个不同函数均正交，构成 **正交函数系**。

我们考虑用 n 次三角多项式：

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

来逼近函数 $f(x)$，按“平方平均意义”定义逼近误差（距离的平方）：

$$d^2(f,T_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx$$

命题 4.3 (Fourier 系数的最优性)

设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积和平方可积函数，$T_n(x)$ 是任意 n 次三角多项式，$S_n(x)$ 是 f 的 Fourier 级数的部分和：

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

则有 $d^2(f,S_n)\le d^2(f,T_n)$，等号成立当且仅当 $A_0=a_0, A_k=a_k, B_k=b_k\ (k=1,\ldots,n)$。

证明 直接按照定义计算，并利用三角函数系的正交性展开配方：

$$\begin{aligned}
2\pi d^2(f,T_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-T_n(x)]^2\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi a_0A_0 - 2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k) + \frac{\pi A_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \\
&\quad + \pi\left\{\frac{(A_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[(A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right]\right\} \\
&\geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) = 2\pi d^2(f,S_n)
\end{aligned}$$

当且仅当平方项全部为 0 时，取等号。

注 Euler-Fourier 公式在几何上代表了 f 到三角函数基底上的**正交投影**。而 S_n 就是 f 投影到所有 T_n 构成的线性子空间上的垂足，由勾股定理（或投影定理）可知，S_n 必然是距离 f 最近的点。

定理 4.2 (Bessel 不等式)

若 f 于区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积，且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则有：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx \tag{4.4}$$

♡

证明 由最优性的证明过程可知，无论 n 取何值，距离平方 $2\pi d^2(f,S_n)\geq 0$，即：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq 0$$

移项并令 $n\to\infty$，即得 Bessel 不等式。由于该正项级数的部分和有上界，故级数收敛。

注

1. 由 Bessel 不等式级数收敛可知，通项必然趋于零，即 $\lim_{n\to\infty}a_n=0,\lim_{n\to\infty}b_n=0$（Riemann-Lebesgue 引理的最直接推论）。
2. 由此可知，当 $0<p\leq\frac{1}{2}$ 时，三角级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 不可能是任何平方可积函数（L^2 空间）的 Fourier 级数，因为其系数平方和 $\sum\frac{1}{n^{2p}}$ 在 $2p\leq 1$ 时是发散的。

从 Bessel 不等式的证明已知

$$2\pi d^2(f,S_n)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

因此，若 $\lim_{n\to\infty}d^2(f,S_n)=0$，则 Bessel 不等式中的不等号就可换为等号。这就是 Parseval（帕塞瓦尔）等式，它又称为封闭性方程，是 Fourier 级数中最重要的公式之一。

命题 4.4 (Parseval 等式)

设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积，且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则有下列 Parseval 等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

♠

例题 4.1 证明：任意三角多项式 $P_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ 的 Fourier 级数就是其本身。

证明： 设 $P_n(x)$ 的 Fourier 系数为 a_m, b_m。由积分的正交性：

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\cos mx\, dx = \begin{cases} A_m, & 0 \le m \le n \\ 0, & m > n \end{cases}$$

同理 $b_m = B_m\ (m \le n)$，且 $b_m = 0\ (m > n)$。因此 $P_n(x)$ 展开后仍为原级数。这也验证了一致收敛的三角级数必为其自身和函数的 Fourier 级数。

第 4 章 练习

1. 已知函数
$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ x^2, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$
的 Fourier 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$，$S(x)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$ 的和函数，则 $S\left(\frac{7}{2}\right) = (\qquad)$
2. $f(x) = 1 + x$, 且 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, x \in [0, 2\pi]$, 求 $\lim_{n\to\infty} n^2 \sin a_{2n-1}$

第 5 章 多元函数微分学

5.1 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑

这部分内容不做过多阐述，大家自行复习一下诸如开集、闭集、凸集、紧集、连通、道路连通这样的概念。同时要注意一下，$\mathbb{R}^n$ 中的实数系基本定理：Cauchy 收敛准则、区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理。

5.2 多元函数的极限、连续性与可微性

接下来会给出一些例子，来理解这些概念间的关系。

例题 5.1 举例说明：两个累次极限存在且相等与二重极限存在互不蕴涵。

例题 5.2 举例说明：各方向极限存在且相等与两个累次极限存在且相等互不蕴涵。

例题 5.3 存在函数 $f(x,y)$，它在 (x_0,y_0) 附近有定义，且对任何满足 $\lim_{x\to x_0}\varphi(y)=y_0$ 的形如 $y=\varphi(x)$ 的连续曲线，均有 $\lim_{x\to x_0} f[x,\varphi(x)]=A$，但 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$$

则对任何连续函数 $y=\varphi(x)$，若 $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$，则有

$$\lim_{x\to 0} f[x,\varphi(x)]=0.$$

然而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 并不存在.

例题 5.4 分别对各个变量连续的间断函数

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

则对任意固定的 y，$f(x,y)$ 是 x 的连续函数；而对任意固定的 x，$f(x,y)$ 是 y 的连续函数. 但是，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处并不连续，因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $x=y$ 时，$f(x,y)$ 并不趋于 $f(0,0)=0$.

5.2.1 偏导数

设 $D\subset\mathbb{R}^2$, $f:D\to\mathbb{R}$，$(x_0,y_0)\in D$ 为内点。固定 y_0，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 f 在 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数存在，记为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

类似可定义

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

更一般地，设 $f:D\subset\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$，$x^0\in D$ 为内点。记 e_j 为 $\mathbb{R}^d$ 中第 j 个标准基向量，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x^0+te_j)-f(x^0)}{t},\qquad j=1,\dots,d,$$

若该极限存在，则称其为 f 在 x^0 关于第 j 个变量的偏导数。

例题 5.5 举例说明：函数的连续性和偏导数存在性互不蕴涵。

5.2.2 方向导数

设 $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，$x^0 \in D$ 为内点，$v \in \mathbb{R}^d$ 为单位向量。令

$$x = x^0 + tv, \qquad t \geq 0.$$

若极限

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}$$

存在，则称 f 在 x^0 关于方向 v 的方向导数存在，记为

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0).$$

5.2.3 Fréchet 导数

定义 5.1 (Fréchet 可微)

设 $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，$x^0 \in D$ 为内点。若存在一个线性映射

$$L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

使得

$$f(x) = f(x^0) + L(x - x^0) + o\big(|x - x^0|\big), \qquad x \to x^0,$$

则称 f 在 x^0 处 Fréchet 可微，L 称为 f 在 x^0 处的 Fréchet 导数，记为

$$Df(x^0) = L.$$

若将 L 写作行矩阵，则

$$L = A_{1\times d} = (a_1, \ldots, a_d).$$

♣

5.2.3.1 Fréchet 导数的基本性质

若 f 在 x^0 处可微，则有：

1. f 在 x^0 处连续。
2. 各偏导数存在，并且
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = a_j, \qquad j = 1, \ldots, d.$$
3. 对任意单位向量 $v = (v_1, \ldots, v_d)^{\mathsf{T}}$，方向导数存在，并且
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = L(v) = \sum_{j=1}^{d} a_j v_j = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) v_j.$$

定理 5.1 (由偏导连续推出可微)

设 $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，$D$ 为开集。若

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, d,$$

在 D 上存在，且在 $x^0 \in D$ 处连续，则 f 在 x^0 处可微。

♡

由此可得到证明一个函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 不可微的常用方法如下：

1. $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点至少有一个偏导数不存在；
2. $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点不连续；
3. 从定义出发证明 $\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y \neq o(r)$。

例题 5.6 用定义证明：$(xy)^{\frac{5}{7}}$ 在原点处可微。

5.2.4 向量值映射的 Fréchet 导数

设

$$F : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell, \qquad F = (f_1, \dots, f_\ell)^\mathsf{T}.$$

若存在线性映射 $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$ 使

$$F(x) = F(x^0) + L(x - x^0) + o(|x - x^0|),$$

其中

$$o(|x - x^0|) = \varepsilon(x)\,|x - x^0|, \qquad \lim_{x \to x^0} \varepsilon(x) = 0 \in \mathbb{R}^\ell,$$

则称 F 在 x^0 处可微，且

$$DF(x^0) = L.$$

若写成矩阵形式，则

$$L = A_{\ell \times d} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right)_{\ell \times d}.$$

5.2.4.1 Fréchet 导数的运算法则

1. **线性性质：** 若 f, g 在 x^0 处可微，则线性组合也在 x^0 处可微，并满足相应的线性运算法则。
2. **乘法法则：** 若 $f, g : D \to \mathbb{R}$ 在 $x^0 \in D$ 处可微，则 fg 在 x^0 处可微，且

$$D(fg)(x^0) = g(x^0)Df(x^0) + f(x^0)Dg(x^0).$$

定理 5.2 (链式法则)

设 $D \subset \mathbb{R}^d$，$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ 为开集，

$$f : D \to \Omega, \qquad g : \Omega \to \mathbb{R}^m.$$

记

$$h = g \circ f : D \to \mathbb{R}^m, \qquad y^0 = f(x^0).$$

若 f 在 x^0 处可微，g 在 y^0 处可微，则 h 在 x^0 处可微，并且

$$Dh(x^0) = Dg(y^0) \circ Df(x^0).$$

矩阵形式为

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x^0) \right)_{m \times d} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y^0) \right)_{m \times \ell} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0) \right)_{\ell \times d}.$$

因此

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x^0) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y^0) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0).$$

5.2.5 线性映射的范数

设

$$L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$$

为线性映射，其矩阵表示为

$$L = A_{\ell \times d} = (a_{ij})_{\ell \times d}.$$

定义

$$\|L\| = \max_{|x|=1} |L(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{|L(x)|}{|x|},$$

称为 L 的范数。矩阵的 Frobenius 范数记为

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

有

$$\frac{\|A\|_2}{\sqrt{d}} \le \|L\| \le \|A\|_2 ,$$

并且对任意 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|L(x)| \le \|L\| \, |x| .$$

5.2.6 中值定理

定理 5.3 (微分中值定理)

设 $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, D 为开集, f 在 D 上可微。若 $x, y \in D$ 且线段 $\overline{xy} \subset D$, 则存在

$$\xi \in \overline{xy}$$

使得

$$f(y) - f(x) = Df(\xi)(y - x).$$

♡

命题 5.1 (向量值情形)

设 $F : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G 为开集, F 可微。若 $x, y \in G$, $x \neq y$, 且 $\overline{xy} \subset G$, 则对任意 $a \in \mathbb{R}^m$, 存在 $z \in \overline{xy}$, 使得

$$a \cdot \big(F(y) - F(x)\big) = a \cdot J_F(z)(y - x).$$

♠

证明 [提示] 令

$$\varphi(t) = a \cdot \big(F(x + t(y - x)) - F(x)\big), \qquad t \in [0, 1],$$

再对 φ 应用一元函数的中值定理。

定理 5.4 (拟微分中值定理)

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为凸集, $f : D \to \mathbb{R}^m$ 在 D 上可微。若 $a, b \in D$, 则存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$|f(b) - f(a)| \le \|Df(a + \theta(b - a))\| \, |b - a| .$$

♡

证明 [提示] 令

$$\varphi(t) = \langle f(a + t(b - a)) - f(a), f(b) - f(a) \rangle , \qquad t \in [0, 1],$$

并使用一元函数的中值定理与 Cauchy–Schwarz 不等式。

5.2.7 极值点与驻点

设 $x^0 \in D$ 为内点, $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, x^0 为 f 的极值点。若 f 在 x^0 处各偏导数存在, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

若

$$\nabla f(x^0) = 0 \in \mathbb{R}^d,$$

则称 x^0 为 f 的驻点。

定理 5.5 (二阶判别法)

设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 为开集，$f: D \to \mathbb{R}$，$x^0 \in D$ 为驻点。若 f 在 x^0 处二阶可微，记 Hessian 矩阵为

$$D^2 f(x^0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right)_{d \times d},$$

则：

1. 若 $D^2 f(x^0)$ 正定，则 x^0 为 f 的极小值点；
2. 若 $D^2 f(x^0)$ 负定，则 x^0 为 f 的极大值点；
3. 若 $D^2 f(x^0)$ 不定，则 x^0 不是 f 的极值点；
4. 若 $D^2 f(x^0)$ 半正定或半负定，则该方法无法判断。

♡

5.2.8 Clairaut–Schwarz 定理

定理 5.6 (Clairaut–Schwarz)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$n \geq 2$，$f: \Omega \to \mathbb{R}$。若 $i \neq j$，且在 Ω 上有关偏导数存在并满足相应连续性条件，则混合偏导数可交换，即对任意 $x \in \Omega$，

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x).$$

也即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

♡

5.2.9 反函数定理与隐函数定理

定理 5.7 (反函数定理)

设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开集，$F: U \to \mathbb{R}^m$ 是 $C^k (k \geqslant 1)$ 映射。弱 $a \in U$, 且 $DF(a)$ 非奇异，则存在 a 的一个开邻域 $W \subset U$, 使得 $FW \to F(W) = V$ 为 C^k 微分同胚；且若 $x \in W, y = F(x)$, 则 F^{-1} 在 y 的微分为

$$DF^{-1}(y) = (DF(x))^{-1}$$

♡

推论 5.1 (隐函数定理)

设 U, V 分别为 $\mathbb{R}^m$,$\mathbb{R}^n$ 中的开子集，映射 $f: U \times V \to \mathbb{R}^n$ 是 $C^k(k \geqslant 1)$. 若对于 $x_0 \in U, y_0 \in V$, 映射 $y \mapsto f(x_0, y)$ 在 y_0 的微分 $D_2 f(x_0, y_0)$ 非奇异，则存在 x_0 的邻域 $U_0 \subset U$ 及唯一确定的 C^k 映射 $g: U_0 \to \mathbb{R}^n$, 使得 $g(x_0) = y_0$, 且对于一切 $x \in U_0$, 有

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$$

♡

例题 5.7 利用依据说明 $e^{x+y+1} - x^2 y = e$ 可以确定唯一的隐函数 $y = y(x)$，并求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

5.3 条件极值与最值

在满足约束条件 $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m,\ m < n)$ 时，求函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的极值问题，可归结为对 Lagrange 函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5.1}$$

求普通函数极值的问题，其中 $\lambda_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为常数因子．这种方法称为 Lagrange 乘子法.

1. 作出 Lagrange 函数；

2. 由 $L_{x_i}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 与 $\varphi_i=0\ (i=1,2,\cdots,m)$ 联立解出 L 的全部驻点与 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的具体值，并要求驻点处矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

的秩为 m；

3. 对每个驻点 p_0，算出 Hesse 矩阵 $H(p_0)=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}(p_0)$.
   (1) 若 $H(p_0)$ 正定，则 p_0 为（条件）极小值点；
   (2) 若 $H(p_0)$ 负定，则 p_0 为（条件）极大值点；
   (3) 若 $H(p_0)$ 既不是正定，也不是负定，则由
   $$\mathrm{d}\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=0,\quad i=1,2,\cdots,m$$
   以及矩阵的秩为 m，解出 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 中的 m 个. 不妨设可解出 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_m$，将其代入 n 元二次型 $\left(\mathrm{d}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\mathrm{d}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\mathrm{d}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 L(p_0)$ 中，化为二次型 $\sum_{i,j=1}^{n-m}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$. 令 $A=(a_{ij})_{(n-m)\times(n-m)}$. 若 A 是正定的，则 p_0 为（条件）极小值点. 若 A 是负定的，则 p_0 为（条件）极大值点. 若 A 是不定的，则 p_0 不是（条件）极值点. 若 A 是半定的，则需进一步判定.

如此看来，若出现 $H(p_0)$ 既不正定，也不负定的情况下，讨论将相当复杂.

例题 5.8 利用条件极值证明点到平面距离公式。

例题 5.9 设 $p\geqslant$, 求 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^p+y^p)=C>0$ 在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的最小值。

5.4 偏导数在几何上的应用

5.4.1 空间曲线的切向量、切线与法平面

设空间曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为:
$$\vec{\tau}=(\tau_x,\tau_y,\tau_z)$$
则曲线在点 P_0 处的**切线方程**为:
$$\frac{x-x_0}{\tau_x}=\frac{y-y_0}{\tau_y}=\frac{z-z_0}{\tau_z}$$
曲线在点 P_0 处的**法平面方程**为:
$$\tau_x(x-x_0)+\tau_y(y-y_0)+\tau_z(z-z_0)=0$$

5.4.1.1 1. 曲线由参数方程给出

若曲线 Γ 的参数方程为:
$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$
其中 t 为参数，$x(t),y(t),z(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续且导数不同时为 0. 这样的曲线称为**光滑曲线**.

对应于 $t=t_0$ 的点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$，则其**切向量**可表示为：

$$\vec{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

5.4.1.2 2. 曲线由一般方程（两个曲面的交线）给出

若曲线 Γ 表示为两个曲面的交线：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

其中 F,G 关于 x,y,z 具有连续偏导数．点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足该方程组，即 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$G(x_0,y_0,z_0)=0$．

且 F,G 在点 P_0 处的 Jacobi 矩阵：

$$J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

的秩为 2，则 Γ 在点 P_0 处的**切向量**为：

$$\vec{\tau}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0},\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0},\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\right)$$

其中各项显式写开为行列式形式：

$$\vec{\tau}=\left(\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_{P_0},\left.\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}\right|_{P_0},\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_{P_0}\right)$$

5.4.2 曲面的法向量、法线与切平面

设曲面 Σ 上有一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$．若曲面在点 P_0 处存在一个不为零的向量与该点处的一切切线都正交，则称该向量为曲面在点 P_0 处的**法向量**，记为 $\vec{n}$．

通过点 P_0 且以 $\vec{n}$ 为方向向量的直线称为曲面在该点处的**法线**；通过点 P_0 且与法线垂直的平面称为曲面在该点处的**切平面**．

5.4.2.1 1. 曲面由隐式方程给出

若曲面 Σ 的方程为：

$$F(x,y,z)=0$$

其中函数 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数，且在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的偏导数不同时为 0．

则曲面 Σ 在点 P_0 处的**法向量**为：

$$\vec{n}=(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0))$$

此时，曲面在点 P_0 处的**切平面方程**为：

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$$

5.4.2.2 2. 曲面由显式方程给出

若光滑曲面 Σ 的方程为：

$$z=f(x,y)$$

对应地，可以将其看作隐式方程 $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$ 的特殊情况。

由于 $F_x=f_x$，$F_y=f_y$，$F_z=-1$，故曲面在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的**法向量**可取为：

$$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$$

此时，曲面在点 P_0 处的**切平面方程**为：

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

第 6 章 多元函数积分学

6.0.1 Fubini 定理（重积分化为累次积分）

定理 6.1

设 $X \subset \mathbb{R}^m$ 和 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭区间，$X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ 为它们的直积。若函数 $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ 在 $X \times Y$ 上可积，则以下积分同时存在且彼此相等：

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

♡

6.0.2 重积分的变量替换定理

定理 6.2

设 $V, U \subset \mathbb{R}^d$ 为开集，$\varphi \in C^1(V,U)$ 是同胚映射，且其微分 $\mathrm{D}\varphi(t)$ 处处可逆。设 $\Omega \subset U$ 为 Jordan 可测紧集，$f \in \mathcal{R}(\Omega)$ 且有界。记 $D = \varphi^{-1}(\Omega)$，$g(t) = f(\varphi(t)) \cdot |\det \mathrm{D}\varphi(t)|$。

则满足以下结论：

1. $D \subset V$ 是 Jordan 可测的；
2. $g \in \mathcal{R}(D)$；
3. 变量替换公式成立：

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(\varphi(t)) \cdot |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

特别地，当 $f(x) \equiv 1$ 时，可得区域 Ω 的 Jordan 测度（体积）为：

$$v(\Omega) = \int_D |\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

♡

6.0.3 Green 公式

定理 6.3

设 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭区域 D 的边界 ∂D 是由有限条分段光滑的简单闭曲线组成。约定 $C = \partial D = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ 取正向（即人沿曲线行走时，区域 D 总在左侧）。

若函数 $P, Q \in C^1(\overline{D})$，则有：

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

♡

6.0.4 Gauss 公式（高斯散度定理）

定理 6.4

设 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域 Ω，其边界 $\partial\Omega = \Sigma$ 是由有限个分片光滑的简单闭曲面组成。

取 Σ 的外法线方向。若函数 $P, Q, R \in C^1(\overline{\Omega})$，则有：

$$\iint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

右端被积函数亦可简记为场论中的散度：$\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}}$，其中 $\vec{\mathbf{A}} = (P, Q, R)$。

♡

6.0.5 Stokes 公式

定理 6.5

设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 为连通的 C^2 类光滑可定向曲面，其边界 $\partial\Sigma = \Gamma$ 是分段光滑的简单闭曲线。曲面法向量的指向与边界曲线的绕行方向满足右手螺旋法则。

若函数 $P, Q, R \in C^1(\overline{\Sigma})$，则有：

$$\int_{\partial\Sigma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

亦可展开为显式形式：

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

左端被积函数可简记为场论中的旋度：$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}}$（或 $\mathrm{curl}\vec{\mathbf{A}}$）。

♡

定理 6.6 (一般形式的 Stokes)

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中连通紧区域，其边界 $\partial\Omega$ 由有限个 $(n-1)$ 维 C^2 类分片光滑超曲面组成，$\omega \in \Lambda^{n-1}(\Omega)$ 是 C^1 类微分形式，则

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega.$$

♡

一、重积分计算

1. 计算下面重积分:
   (a). $\iint_D (2xy + x^2)\, dxdy$, 其中 D 是由 $y = x, y = 2x, y = 2$ 围成的区域;
   (b). $\iint_D x^2y\, dxdy$, 其中 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 1\}$.

2. 计算下面重积分:
   (a). $\iint_D \cos\frac{x-y}{x+y}\, dxdy$, 其中 D 是由 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 围成的区域;
   (b). $\iint_D (x^2 - y^2)\, dxdy$, 其中 D 是由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ 围成的区域, 其中 $a > 0$ 是常数;
   (c). $\iiint_\Omega (x + y^2 + z^3)\, dxdydz$, 其中 Ω 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.

二、曲线与曲面积分证明题

1. 设 $f(x)$ 连续可微, L 为逐段光滑闭曲线, 证明:
   (a). $\oint_L f(xy)(y\, dx + x\, dy) = 0$;
   (b). $\oint_L f(x^2 + y^2)(x\, dx + y\, dy) = 0$.

三、曲线与曲面积分计算题

1. 求解下列各题:
   (a). 求 $\int_L \frac{e^{2x}\ln(1+e^{2x})}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, ds$, 其中 $L : y = e^x, x \in [0, 1]$.
   (b). 求 $\iiint_V z\, dxdydz$, 其中 V 是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ 与 $z \le 0$ 的相交区域.
   (c). 求 $\oint_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$, 其中 L 是 $|x| + |y| \le 2$ 的边界, 方向沿逆时针方向.
   (d). 求 $\iint_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy$, 其中 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

1. 计算曲面积分
$$I = \iint_S \frac{x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}}$$
   其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 常数满足 $a > 0, b > 0, c > 0$.

2. 试用 Stokes 公式计算
$$I = \oint_C (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$$
   其中 C 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = 2rx$ 的交线 $(0 < r < R, z > 0)$, C 的定向使得 C 所包围的球面上较小区域保持在左边.