2021-2022数分I(H)回忆卷参考答案

1.

$$Cauchy\text{收敛准则}:\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,\text{有}|a_n-a_m|<\epsilon\text{则称数列}\{a_n\}\text{收敛}$$
$$\forall\epsilon>0.\exists N=[\frac{1}{\epsilon}],\forall n,m>N,\text{有}|\sum_{k=1}^{n}\frac{sink}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{m}\frac{sink}{k(k+1)}|=|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{sink}{k(k+1)}|$$
$$\leq\sum_{k=m+1}^{n}|\frac{sink}{k(k+1)}|\leq\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{N}\leq\epsilon$$

2.

$$(1):\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+u^4)^{\frac{1}{4}}du}{x^4}=(L'Hospital)\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{1}{x^{12}}+\frac{1}{x^8})^{\frac{1}{4}}}{4}=0$$

$$(2):\int\frac{3x^2-4x-1}{x^3-2x^2-x+2}dx=\int\frac{d(x^3-2x^2-x+2)}{x^3-2x^2-x+2}=ln(x^3-2x^2-x+2)+C$$

$$(3):Taylor's\ expansion:f(x)=\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3)\ \text{因此}f'(0)=0,f''(0)=-\frac{1}{3}$$

$$(4):\text{求}e^x\text{导数即可得切线斜率为}e^x,\text{设切点为}(x_0,e^{x_0}),\text{则可得切线方程}y=e^{x_0}x-(x_0-1)e^{x_0}\text{，代入}(0,0)$$
$$\text{即可求得}x_0=1,\text{切线方程为}y=ex.\text{再利用求绕}x\text{轴体积积分公式可得}V=\pi\int_0^1(e^x)^2-(ex)^2dx=\frac{\pi(e^2-3)}{6}$$

3.

$$\text{假设数列}\{a_n\}\text{无上界,则由定义}:\forall N>0,\exists n,\text{使得}a_n>N(\text{这样的}a_n\text{一定有无限个,否则取前面}max\text{即有界})$$
$$\text{我们不妨令}N=1\text{，则}\exists n_1\text{使得}a_{n_1}>1,\text{再令}N=2,\exists n_2>n_1(\text{否则,则仅有有限个}a_{n_k}>2)\text{使得}a_{n_2}>2$$
$$\text{以此类推可以得到子列}\{a_{n_k}\}\text{使得}a_{n_k}>k,\text{则可得}\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty$$

4.

$$\text{由}sup\ f(x)\text{与}inf\ f(x)\text{第一条公理化定义可以得到}\forall x\in[0,1]\text{有}inf\ f(x)\leq f(x)\leq sup\ f(x)$$
$$\text{则}\forall x',x''\in[0,1],\text{不妨假设}f(x')>f(x'')\text{则}f(x')-f(x'')\leq sup\ f(x)-inf\ f(x)$$
$$\text{由第二条公理化定义可以得到}:\forall\epsilon>0,\exists x_0,x_1\text{使得}f(x_0)<inf\ f(x)+\frac{\epsilon}{2},f(x_1)>sup\ f(x)-\frac{\epsilon}{2}$$
$$\text{则}f(x_1)-f(x_0)>sup\ f(x)-inf\ f(x)-\epsilon(\text{上确界第二条公理化定义})\text{即证.}$$

5.

$$\text{由}\lim_{x\to0}f'(0)\text{极限存在的局部有界性可得,}\exists\delta_0,\forall0<x<\delta_0\text{有}|f'(0)|\leq M$$
$$\text{考虑函数极限的}Cauchy\text{收敛准则}:\forall\epsilon>0,\exists\delta=min\{\delta_0,\frac{\epsilon}{M}\},\forall0<x',x''<\delta\text{有}$$
$$|f(x')-f(x'')|=(Lagrange\ Mean\ Value)|f'(\xi)(x'-x'')|\leq M|x'-x''|\leq\epsilon$$

6.

$$\text{考虑用定义证明一致连续,首先对于}\lim_{x\to\infty}f(x)-g(x)=0\text{可知}$$
$$\forall\epsilon>0,\exists G>0,\forall x>G\text{有}|f(x)-g(x)|\leq\frac{\epsilon}{3}\text{而}f(x)\text{又一致连续则可知}$$
$$\exists\delta_0,\forall x',x''\in(0,+\infty)\text{且}|x'-x''|<\delta_0,\text{有}|f(x')-f(x'')|\leq\frac{\epsilon}{3}\text{故而可以得到}$$
$$\exists\delta_0,\forall x',x''\in(G,+\infty)\text{且}|x'-x''|<\delta_0\text{有}$$
$$|g(x')-g(x'')|\leq|g(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|+|g(x'')-f(x'')|\leq\epsilon$$
$$\text{再回归到}g(x)\text{的连续性上,由}Cantor\text{定理可知,}g(x)\text{在}[0,G+\delta_0]\text{上一致连续,合并前述两条性质有}:$$
$$\forall\epsilon>0,\exists\delta=\delta_0,\forall x',x''\in(0,+\infty)\text{且}|x'-x''|<\delta,\text{有}|g(x')-g(x'')|\leq\epsilon$$
$$\text{即证}g(x)\text{的在}x\text{轴正半轴上的一致连续性质.}$$

7.

$$先证\int_0^{+\infty} f(x)dx收敛即\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx(分成0-1,1-+\infty考虑),考虑|\int_1^A sinxdx|=|1-cosA|<2有界$$

且$\dfrac{1}{x}$在$x\to+\infty$时单调递减趋于0,则由$Dirichlet$收敛定理可知其收敛(0−1部分可以直接连续延拓). 再考虑$\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$收敛性.

$$由于\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1.5}sin^2x}{x^2}=0可知该反常积分收敛,下证其值相等$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{sin^2x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}sin^2xd(\frac{1}{x})=\int_0^{+\infty}\frac{sin2x}{x}dx-\frac{sin^2x}{x}|_0^{+\infty}=\int_0^{+\infty}\frac{sin2x}{2x}d(2x)即证$$

8.

(1):考虑利用单调有界收敛准则,由$x_1\in(0,1)$,则可归纳得$0<x_{n+1}$,而由$f(x)\in(0,1)$则$x_{n+1}<x_n<1$
故以上可得x_n单调递减(递推关系中缩放$f(x)$)且$0<x_n<1$,则知其收敛:递推式两边取极限即证.

$$(2):先考虑极限\lim_{n\to\infty}nx_n^\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^\alpha}}=(Stolz)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n^\alpha}-\frac{1}{x_{n-1}^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{[x_{n-1}(1-f(x_{n-1}))]^\alpha}-\frac{1}{x_{n-1}^\alpha}}$$

$$换元令t=x_{n-1}则=\lim_{t\to0}t^\alpha\frac{(1-f(t))^\alpha}{1-(1-f(t))^\alpha}=\lim_{t\to0}\frac{t^\alpha}{1-(1-\alpha f(t))}=\lim_{t\to0}\frac{t^\alpha}{\frac{\alpha}{3!}f'''(0)t^3+o(t^3)}$$

若要使上式极限不为零,则可得$\alpha=3$同时可计算出极限为$\dfrac{2}{f'''(0)}$,通过适当的变形到题目中给给定式子可得:

$$当c=\sqrt[3]{\frac{2}{f'''(0)}},且\alpha=\frac{1}{3}时满足题设.$$