2021-2022数学分析(甲)I(H)期末考试

浙江大学　　上善若水

答案仅供参考！

1.叙述数列收敛的柯西收敛原理，并用柯西收敛原理证明$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{sink}{k(k+1)}$收敛

> 柯西收敛原理：$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall$对$n,m>N$都有$|a_n-a_m|<\epsilon$
> $\forall\epsilon>0,$取$N>\frac{1}{\epsilon},$则$m+1>N>\frac{1}{\epsilon}$
> 不妨$n>m>N,|a_n-a_m|=|\frac{sin(m+1)}{(m+1)(m+2)}+...+\frac{sinn}{n(n+1)}|<|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}|<\epsilon$
> 所以a_n收敛

2.计算题

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x(1+u^4)^{\frac{1}{4}}du}{x^3}$

> 由洛必达法则：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{3x^2}=0$

(2) $\int\frac{3x^2-4x-1}{x^3-2x^2-x+2}dx$

> 原式$=ln|x^3-2x^2-x+2|+C$
> 注：观察，凑微分

(3)$f(x)=\begin{cases}\frac{sinx}{x},x\neq0\\1,x=0\end{cases}$ 求$f'(0),f''(0)$.

> $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx-x}{x^2}=0$
> $x\neq0$时，$f'(x)=\frac{xcosx-sinx}{x^2}$
> $f''(0)=\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xcosx-sinx}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(cosx-1)+x-sinx}{x^3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$
> 注：导数定义，常见泰勒展开式

(4)设曲线$C: y =$
e^x,过$(0,0)$向C作切线L，求L，C，y轴所围成图形绕x轴旋转一周形成旋转体的体积

> 易知切点$(1,e)$，作图得$V = \int_0^1 \pi e^{2x} dx - \frac{1}{3}\pi e^2 = \frac{\pi e^2}{6} - \frac{\pi}{2}$

3.证明：若$\{x_n\}$无上界但并非正无穷大，求证：$\{x_n\}$存在一个发散到正无穷大的子列

> 无上界：对$\forall M$,均$\exists n$,使得$x_n > M$
> 并非正无穷大：$\exists G > 0$,对于$\forall N$,存在$n_0 > N$,使得$x_{n_0} \leq G$
> 取$M_1 = 1$,则存在n_1,满足$x_{n_1} > 1$
> 取$M_2 = 2$,存在n_2满足$x_{n_2} > 2$
> 并且，一定存在$n_2 > n_1$满足上述要求。否则如果找不到$n_2 > n_1$,那么对于$\forall n >$
> n_1,都有$x_n \leq M_2$则$\{x_n\}$在$(n_1, +\infty)$上有界，矛盾！
> 类似地，取$M_i = i$,存在$n_i > n_{i-1}$满足$x_i > i$
> 由此得到子列$\{x_{n_k}\}$满足$x_{n_k} > k$显然发散到正无穷.
> **注：课本$P59T10$**

4.设$f(x)$在$[0,1]$上有界，证明：$\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) - \inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \sup\limits_{x',x''\in[0,1]} |f(x') - f(x'')|$

> 令$\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = M$，$\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) = m$,由上下界的定义：$\forall x_1, x_2 \in (0,1), M \geq$
> $f(x_1), f(x_2) \geq m$
> 从而得到$M - m \geq |f(x_1) - f(x_2)|$,这就证明了$M - m$是上界
> 又由确界的定义，对$\forall \epsilon > 0$,存在x_1满足$f(x_1) > M - \epsilon$,存在x_2满足$f(x_2) < m + \epsilon$
> $f(x_1) - f(x_2) < M - m - 2\epsilon$，这就证明了上确界
> 注：利用上确界的两点定义即可。

5.$f(x) \in D[0,1]$,且$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$存在，求证$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$存在

> 极限存在的性质：局部有界性.存在δ, M满足：$0 < x < \delta$时，$|f'(x)| \leq M$
> 由柯西收敛准则：$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\epsilon}{M}, \forall x_1, x_2 \in (0, \delta)$都有$|f(x_1) - f(x_2)| =$
> $|f'(\xi)(x_1 - x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \leq M\delta = \epsilon$
> 注：联想极限存在的性质，证明极限存在的方法
> 当笼统证明极限存在而没说多少的时候，多用柯西收敛原理

6.$f(x)$在$(0,+\infty)$上一致连续，$g(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] =$
0,求证：$g(x)$在$(0,+\infty)$上一致连续

> 由$f(x)$在$(0,+\infty)$上一致连续$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$,对于任意的$x_1, x_2 \in$
> $(0,+\infty)$,只要$|x_1 - x_2| < \delta$,就有$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

> $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0 \Rightarrow \forall\epsilon>0,\exists X$，$\forall x_1,x_2>X$,都有$|f(x_1)-g(x_1)-$
> $[f(x_2)-g(x_2)]|<\epsilon$
> 先考虑$g(x)$在$[X,+\infty)$的一致连续性，$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$,对于任意的$x_1,x_2\in$
> $[X,+\infty)$,只要$|x_1-x_2|<\delta$,就有$|g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-g(x_1)-[f(x_2)-$
> $g(x_2)]|+|f(x_1)-f(x_2)|<2\epsilon$
> 又由$Cantor$定理，$g(x)$在$[0,X+$
> $1]$上连续且一致连续，综上$g(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续
> **注：课本$P99T8$，$T15$**

7.$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sinx}{x},x>0\\ 1,x=0\end{cases}$,求证$\int_0^{+\infty}f(x)dx,\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$均收敛，并证明二者相等.

> $y=sinx$的变上限积分有界，$y=$
> $\dfrac{1}{x}$单调递减且在无穷处的极限为0，由狄利克雷判别法，$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛
> $f^2(x)\le\dfrac{1}{x^2}$,由比较判别法，$\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$收敛。
> $\int_0^{+\infty}\dfrac{sin^2x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}sin^2xd(\dfrac{-1}{x})=\dfrac{-sin^2x}{x}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\dfrac{-1}{x}d(sin^2x)=$
> $\int_0^{+\infty}\dfrac{sin2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{sin2x}{2x}d(2x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{sinx}{x}dx.$

8.$f(x)$三阶可导，$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,f'''(0)>0,0<f(x)<1$,选取$x_1\in$
$(0,1)$,按递推关系$x_{n+1}=x_n(1-f(x_n))$得到数列$\{x_n\}$
(1)求证：$\lim_{n\to+\infty}x_n=0.$
(2)求证 : 存在非零常数c和正数α,满足$\lim_{n\to+\infty}cn^\alpha x_n=1$

> (1)用数学归纳法证明$x_n>0:x_1>0$,假设$x_k>0,x_{k+1}=x_k(1-f(x_k))>0$，成立
> 由递推关系：$x_{n+1}-x_n=-x_nf(x_n)<0$，所以x_n递减
> 由单调有界准则，x_n的极限存在，设为A，在递推式两边令$n\to+\infty$
> $A=A(1-f(A))\Rightarrow Af(A)=0$
> 易知$0\le A<1$,若$A=0$，则上式显然成立。
> 若$0<A<1$,则$Af(A)$不可能为0，综上：$\lim_{n\to+\infty}x_n=0$

> (2)先考虑求$\lim_{n\to+\infty}nx_n^k=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^k}}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^k}-\frac{1}{x_n^k}}=$
> $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x_n^k[x_n(1-f(x_n))]^k}{x_n^k-[x_n(1-f(x_n))]^k}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x_n^k(1-f(x_n))^k}{1-(1-f(x_n))^k}$
> 由于$n\to+\infty,x_n\to0,f(x_n)\to0$.利用$(1+x)^\alpha$在0处展开式有：

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n^k(1-f(x_n))^k}{1-(1-f(x_n))^k}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^k(1-kf(t))}{kf(t)}=\lim\limits_{t\to0}(\frac{t^k}{kf(t)}-t^k)$

$\lim\limits_{t\to0}\frac{t^k}{kf(t)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{(k-1)(k-2)t^{k-3}}{f'''(t)}$

要满足题意，必有$k=3$,此时$nx_n^3\sim\frac{2}{f'''(0)}$即$x_n\sim(\frac{2}{f'''(0)})^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{1}{3}}$

所以$\alpha=\frac{1}{3},c=(\frac{f'''(0)}{2})^{-\frac{1}{3}}$

注：同类题课本$\boldsymbol{P184T9(5.4)}$