2022-2023数学分析(甲)I(H)期末练习题

浙江大学　　上善若水

答案仅供参考!

一、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{lnx})$

令$t+1=x$,则$t\to 0$

原式$=\lim\limits_{t\to 0}(\frac{1}{t}-\frac{1}{ln(1+t)})=\lim\limits_{t\to 0}\frac{ln(t+1)-t}{tln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)}=-\frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{cos(\frac{k}{n})}{1+sin(\frac{k}{n})}$

由定积分的定义可得：原式$=\int_0^1\frac{cosx}{1+sinx}dx=ln(1+sinx)|_0^1=ln(1+sin1).$

3. $\int\frac{ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$

$\int\frac{ln(x+1)}{(x+2)^2}dx=\int ln(x+1)d(\frac{-1}{x+2})$
$=-\frac{ln(x+1)}{x+2}+\int\frac{1}{(x+2)(x+1)}dx$
$=-\frac{ln(x+1)}{x+2}+ln\frac{x+1}{x+2}+C(x>-1)$

4.求$y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}dt$在$x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$上的弧长

$y'=\sqrt{3-x^2}$,弧微分$ds=\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{4-x^2}dx$
$s=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx=(x\sqrt{4-x^2}+4arcsin\frac{x}{2})|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$

> 注：可以画图求面积求这个定积分，更容易一点

5. $\int_0^{+\infty}e^{-x}cosxdx$

先求$\int e^{-x}cosxdx=e^{-x}\frac{1}{2}(sinx-cosx)$(略去$C$)
所以原式$=e^{-x}\frac{1}{2}(sinx-cosx)|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}$

二、叙述确界原理，并利用确界原理证明：
若有界函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，则极限$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$存在

确界原理：非空有界数集必存在确界
单侧极限存在的证明：设$E=\{f(x)|x\in(0,1)\}$
易知E有上界$f(1)$,且E非空，所以E存在上确界A.
由上确界的性质，$\forall\epsilon>0,$存在$x_0\in(0,1),f(x_0)>A-\epsilon$
则对$\forall\epsilon>0,\exists\delta=1-x_0>0,$当$1-\delta<x<1$即$x_0<x<1$时，由$f(x)$的单调性有：

$$A+\epsilon>A(\text{上确界})>f(x)>f(x_0)>A-\epsilon$$

$\Rightarrow|f(x)-A|<\epsilon$，所以单侧极限存在

> 注：2020期末第一题.

三、已知$g(x)$有二阶连续导数，$g(0)=1,g'(0)=0,$且$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-cosx}{x}(x\neq0)\\a(x=0)\end{cases}$

1.若$f(x)$在$x=0$处连续，求a

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+sinx}{1}=0=a$$

2.已知$f(x)$在$x=0$处连续，讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-cosx}{x^2}=\frac{g''(0)+1}{2}$$
$x\neq0$时，$f'(x)=\dfrac{x(g'(x)+sinx)-g(x)+cosx}{x^2}$
$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(g''(x)+cosx)}{2x}=\frac{g''(0)+1}{2}=f'(0)$$
因此$f'(x)$在$x=0$处连续

四、叙述函数$f(x)$在区间I上一致连续的定义，并证明$f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$在$[0,+\infty)$上一致连续

一致连续的定义是：$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in I,$只要$|x_1-x_2|<\delta,$就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$

先证：$\forall x,y\geq0,x^{\frac{1}{2023}}+y^{\frac{1}{2023}}>(x+y)^{\frac{1}{2023}}$
这是显然的，因为两边同时2023次方就可以得到。
所以可以得到：$x^{\frac{1}{2023}}-y^{\frac{1}{2023}}<|x-y|^{\frac{1}{2023}}$
$\forall\epsilon>0,$取$\delta=\epsilon^{2023},|x_1,x_2|<\delta$时，$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|^{\frac{1}{2023}}<\epsilon$

> 注：此题也可以用Cantor定理和Lagrange中值定理证出。

五、已知连续的非常值函数$f(x)$满足：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$, 证明：$f(x)$在$[0,+\infty)$上有最大值或者最小值。

因为$f(x)$非常值，不妨$f(1) > f(0)$, 由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$, 得：$\forall\epsilon > 0, \exists X > 1, \forall x > X$, 有$|f(x) - f(0)| < \epsilon$
特别地，取$\epsilon = f(1) - f(0)$, 则$f(x) - f(0) < f(1) - f(0)$
$\Rightarrow f(x) < f(1)(x > X)$
考虑$f(x)$在闭区间$[0, X]$上连续，所以一定存在最大值$M = f(x_0)$
$x \in [0, X], M \geq f(x)$
$x \in [X, +\infty), M \geq f(1) \geq f(x)$
显然M为$f(x)$在$[0,+\infty)$上的最大值。
注：若$f(1) < f(0)$, 类似可证$f(x)$存在最小值，所以可以"不妨".

> 注：这种用极限定义来约束无穷处函数状态的手法还是很常见的。

六、叙述闭区间套定理，并利用闭区间套定理证明闭区间上的连续函数的零点存在性定理：$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b) < 0$, 则$\exists x \in (a,b)$满足$f(c) = 0$.

闭区间套定理：
如果一系列闭区间满足：$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, 且$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数$\xi$属于所有闭区间$[a_n, b_n]$, 且$\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

对$f(x)$进行如下操作，设$a_0 = a, b_0 = b$，不妨$f(a) < 0, f(b) > 0$.
设$f(a_i)f(b_i) < 0$, 对于$\dfrac{a_i + b_i}{2}$, 有以下三种情况：
①$f(\dfrac{a_i + b_i}{2}) = 0$, 则找到$c$
②$f(\dfrac{a_i + b_i}{2}) > 0$, 则令$b_{i+1} = \dfrac{a_i + b_i}{2}, a_{i+1} = a_i$
③$f(\dfrac{a_i + b_i}{2}) < 0$, 则令$a_{i+1} = \dfrac{a_i + b_i}{2}, b_{i+1} = b_i$
对$i = 0, 1, ..., n$进行如上操作，如果某一次找到c，则得证，如果均没有找到
则得到一个闭区间套，$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0(n \to \infty)$
且$f(a_n)f(b_n) < 0$, 令$n \to \infty$, 由闭区间套定理和$f(x)$的连续性可以知道：$f'(\xi) \leq 0$
则只能$f(\xi) = 0, \xi \in (a,b)$即所寻找的$c$.

> 注：书本$\boldsymbol{P99T5}$

七、已知$f(x)$在$(-1,2)$上二阶连续可导，且$f'(\dfrac{1}{2}) = 0$, 证明：

$$\exists\xi \in (0,1) s.t. |f''(\xi)| \geq 4|f(1) - f(0)|.$$

在$x=\frac{1}{2}$处应用带$Lagrange$余项的$Taylor$展开式将$f(x)$展开到2阶

$f(x)=f(\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{1}{2})^2$

代入$x=0$，$x=1$

$f(0)=f(\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{8}$

$f(1)=f(\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{8}$

两式作差：$f''(\xi_2)-f''(\xi_1)=8f(1)-f(0)$

$\Rightarrow 8|f(1)-f(0)|=|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\le|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\le 2|f''(\xi)|$

其中$f''(\xi)=max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$

即证得：$|f''(\xi)|\ge 4|f(1)-f(0)|$.

八、已知$f(x)$在$[0,1]$上二阶连续可导，证明：

$$\int_0^1 x^n f(x)dx=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$\int_0^1 x^n f(x)dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)d(x^{n+1})$

$=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$

$=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)dx$

$=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{f''(\xi)}{(n+1)(n+2)(n+3)},\xi\in(0,1)$.(此处用积分第一中值定理)

注意此时得到的式子只是形式上和结果有差异，故整理成题目中结论所要求的形式

记$\int_0^1 x^n f(x)dx=I$，当$n\to\infty$时：

$nI\to f(1)$

$(n^2I-nf(1))\to -f(1)-f'(1)$

且I最后一项分母最高次数为n^3

因此：$\int_0^1 x^n f(x)dx=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

> 注：题目中的"二阶连续可导"提示用泰勒展开式也是可以的。
>
> $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$