

2022-2023 学年秋冬学期 《数学分析 (甲)I(H)》 第二次小测



2022 年 12 月 15 日

1. 【多选】 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\ln(1+x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}) = 0$, 则下述正确的有 ()。

- A. $f'(0) = \frac{1}{2}$
- B. $f(0) = -1$
- C. $f''(0) = -\frac{2}{3}$
- D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{3}$

2. 【单选】 曲线 $y = \frac{x^2+1}{x-2} + \ln(1+e^x)$ 的渐近线共有 () 条。

- A. 0
- B. 3
- C. 2
- D. 1

3. 【单选】 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $\forall x \in (0, +\infty), f''(x) > 0. \forall n \in \mathbb{Z}^+$, 令 $a_n = f(n)$, 则下述结论必成立的是 ()。

- A. 若 $a_1 < a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必收敛
- B. 若 $a_1 < a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必发散
- C. 若 $a_1 > a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必收敛
- D. 若 $a_1 > a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必发散

4. 【单选】 设 $y = y(x)$ 是方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ 的解且满足 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 。则当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $y(x)$ 等价的无穷小量是 ()。

- A. $\ln \sqrt{1+x^2}$
- B. $\sin x^2$
- C. $1 - \cos \sqrt{x}$
- D. $\ln(1-x^2)$

5. 【单选】 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个领域内有定义。则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导当且仅当 ()。

- A. $\lim_{h \rightarrow +\infty} h(f(\frac{1}{h}) - f(0))$ 存在
- B. $\lim_{h \rightarrow -\infty} h(f(\frac{1}{h}) - f(0))$ 存在
- C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ 存在
- D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-h)}{h}$ 存在

6. 【多选】 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界且可导, 则以下结论错误的是 ()。

- A. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
- B. 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
- C. 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$
- D. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

7. 【单选】设 $f(x) = e^{-x^2}$, 则 $f^{(2022)}(0) = (\quad)$ 。

- A. $-\frac{2022!}{1011!}$
- B. $\frac{2022!}{1011!}$
- C. $\frac{1}{1011!}$
- D. $-\frac{1}{1011!}$

8. 【多选】设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, $x_0 \in (a, b)$ 。则以下说法正确的是 (\quad) 。

A. 如果 f 在点 x_0 二阶可导, 且 x_0 是 f 的极小值点, 则 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) > 0$ 。

B. 如果 f 在点 x_0 二阶可导, 且 x_0 是 f 的极小值点, 则 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) \geq 0$ 。

C. 如果 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) > 0$ 。则 x_0 是 f 的极值点。

D. 如果 x_0 是 f 在 (a, b) 内唯一的极值点, 则 x_0 也是 f 在 $[a, b]$ 上的最值点。

9. 【单选】设函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x} = -1$, 则有 (\quad) 。

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点。
- B. $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。
- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。
- D. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

10. 【单选】设函数

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^\beta}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

其中 α, β 是正常数, 则当且仅当下述条件 (\quad) 满足时, 必有 $f'(0)$ 存在, 但 $f''(0)$ 不存在。

- A. $1 < \alpha \leq \beta + 1$
- B. $1 < \alpha \leq \beta + 2$
- C. $1 \leq \alpha \leq \beta + 1$
- D. $\beta + 1 < \alpha \leq \beta + 2$