数学分析习题课

助教：汤俊浩

1. 设函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$, 则有(　　).

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. $x=0$是$f(x)$的极小值点. 3人 3.9%
- B. $x=0$是$f(x)$的极大值点. 71人 93.4%
- C. $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点. 0人 0%
- D. $x=0$不是$f(x)$的极值点. 2人 2.6%

答题数据分析　答对: 71　答错: 5　未答: 12　正确率: 93.42%

显然 $f'(0)=0$, 否则 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$ 不存在. 进而 $f''(0)=-1$. 故 $x=0$ 是极大值点.

2. 设函数$f(x)$在$x=0$处二阶可导且满足$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$, 则下述正确的有（　）.

多选题(10 分)（难易度: 中）

- A. $f(0)=-1$. 　63人　79.7%
- B. $f'(0)=\frac{1}{2}$. 　58人　73.4%
- C. $f''(0)=-\frac{2}{3}$. 　59人　74.7%
- D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{x}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{3}$. 　23人　29.1%

答题数据分析　答对: 42　答错: 37　未答: 9　正确率: 53.16%

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}+\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(f(0)+1)+(f'(0)-\frac{1}{2})x+(\frac{f''(0)}{2}+\frac{1}{3})x^2+o(x^2)}{x^2}
\end{aligned}
$$

故有 $f(0)=-1, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=-\frac{2}{3}$. 而 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2}$ 不存在.

3. 设函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内有定义。则$f(x)$ 在$x=0$处可导当且仅当（ ）.

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. $\lim\limits_{h\to-\infty} h\left(f(\frac{1}{h})-f(0)\right)$ 存在. 1人 1.3%

B. $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left(f(\frac{1}{h})-f(0)\right)$ 存在. 0人 0%

C. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(h)-f(-h)}{2h}$ 存在. 14人 17.9%

D. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(0)-f(-h)}{h}$ 存在. 63人 80.8%

答题数据分析 答对: 63 答错: 15 未答: 10 正确率: 80.77%

4. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$ 上二阶可导，且$\forall x \in (0,+\infty), f''(x)>0$. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 令 $a_n=f(n)$,则下述结论必成立的是(　).

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. 若$a_1 > a_2$, 则$\{a_n\}$必收敛. 2人 2.5%
- B. 若$a_1 > a_2$, 则$\{a_n\}$必发散. 3人 3.8%
- C. 若$a_1 < a_2$, 则$\{a_n\}$必收敛. 2人 2.5%
- D. 若$a_1 < a_2$, 则$\{a_n\}$必发散. 72人 91.1%

答题数据分析　答对: 72　答错: 7　未答: 9　正确率: 91.14%

$$f(2)-f(1)=f'(\xi)>0$$

$$f(n)-f(\xi)=f'(\xi)(n-\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(n-\xi)^2 \geq f'(\xi)(n-\xi) \to +\infty$$

选项 AB 的反例考虑 $f(x)=x^2, f''(x)=2.g(x)=-e^{-\frac{1}{x^2}}, g''(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(6x^2-4)}{x^6}$.

5. 设函数$f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha \sin\frac{1}{|x|^\beta}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,其中$\alpha,\beta$是正常数，则当且仅当下述条件(　)满足时，必有 $f'(0)$存在，但$f''(0)$不存在.

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. $1\le\alpha\le\beta+1$. 9人 11.5%
- B. $1<\alpha\le\beta+1$. 27人 34.6%
- C. $1<\alpha\le\beta+2$. 18人 23.1%
- D. $\beta+1<\alpha\le\beta+2$. 24人 30.8%

答题数据分析　答对: 18　答错: 60　未答: 10　正确率: 23.08%

$f(x)$ 偶函数, 仅需考虑 $x\ge 0$ 部分.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin x^{-\beta}$$

由于 $\beta>0, x^{-\beta}\to\infty$. 故当且仅当 $\alpha-1>0$ 时上述极限存在且等于 0. 另外 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$.

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\alpha x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta}$$

显然当且仅当 $\alpha-2>0,\alpha-\beta-2>0$ 时上述极限存在且等于 0. 故 $\alpha\le\beta+2$ 时上述极限不存在.

6. 设$f(x)=e^{-x^2}$, 则 $f^{(2022)}(0)=$(　　).

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. $\frac{1}{1011!}$	3人	3.9%
B. $-\frac{1}{1011!}$	2人	2.6%
C. $\frac{2022!}{1011!}$	5人	6.5%
D. $-\frac{2022!}{1011!}$	67人	87%

答题数据分析　答对: 67　答错: 10　未答: 11　正确率: 87.01%

$$f(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

比较系数得 $\frac{f^{(2022)}(0)}{2022!}=\frac{(-1)^{1011}}{1011!}$

7. 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数，$x_0 \in (a,b)$. 则以下说法正确的是（　　）.

多选题(10 分)（难易度: 中）

- [ ] A. 如果x_0是f在(a,b)内唯一的极值点，则x_0也是f在$[a,b]$上的最值点. 22人 28.6%
- [x] B. 如果$f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)>0$,则x_0是f的极值点. 74人 96.1%
- [ ] C. 如果f在点x_0二阶可导，且x_0是f的极小值点，则$f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)>0$. 19人 24.7%
- [x] D. 如果f在点x_0二阶可导，且x_0是f的极小值点，则$f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)\geq 0$. 55人 71.4%

答题数据分析　答对: 37　答错: 40　未答: 11　正确率: 48.05%

8. 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}+\ln(1+e^x)$的渐近线共有(　　)条.

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. 0 　0人 0%
- B. 1 　3人 3.9%
- C. 2 　20人 26.3%
- D. 3 　53人 69.7%

答题数据分析 　答对: 53 　答错: 23 　未答: 12 　正确率: 69.74%

显然 $x=2$ 是垂直渐近线. 另外

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=2,\ \lim_{x\to+\infty}y(x)-2x=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=1,\ \lim_{x\to-\infty}y(x)-x=2$$

9. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有界且可导，则以下结论错误的是(　　).

多选题(10 分) (难易度: 中)

- [x] A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 　41人　53.9%
- [ ] B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 　21人　27.6%
- [x] C. 当 $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=0$时，必有 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)=0$ 　70人　92.1%
- [x] D. 当 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)=0$ 　65人　85.5%

答题数据分析　答对: 34　答错: 42　未答: 12　正确率: 44.74%

选项 B, 若 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=A\neq 0$. 不妨设 $A>0$, 则 $\exists M>0,\forall x>M, f'(x)>\frac{A}{2}>0$. $f(x)-f(M)=f'(\xi)(x-M)>\frac{A}{2}(x-M)\to+\infty$. 与 $f(x)$ 有界矛盾.

选项 CD 的反例, 考虑 $f(x)=\sin x, f'(x)=\cos x$ 即可. 选项 A 的反例参考第十次习题课 PDF.

10. 设$y=y(x)$是方程 $y''+2y'+y=e^{-x}$的解且满足 $y(0)=0, y'(0)=0$. 则当$x\to 0$时, 与$y(x)$等价的无穷小量是(   ).

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. $1-\cos\sqrt{x}$. 3人 3.8%
- B. $\sin x^2$. 3人 3.8%
- C. $\ln(1-x^2)$. 6人 7.6%
- D. $\ln\sqrt{1+x^2}$. 67人 84.8%

答题数据分析　答对: 67　答错: 12　未答: 9　正确率: 84.81%

0 带入上述等式, 得 $y''(0)=1$. 故

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$