


数学分析习题课

助教：汤俊浩

1. 设函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = -1$, 则有().

单选题(10分) (难度: 中)

- | | | |
|---|-----------|---|
| <input type="radio"/> A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点. | 3人 3.9% |  |
| <input checked="" type="radio"/> B. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. | 71人 93.4% |  |
| <input type="radio"/> C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点. | 0人 0% |  |
| <input type="radio"/> D. $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点. | 2人 2.6% |  |

答题数据分析 答对: 71 答错: 5 未答: 12 正确率: 93.42%

显然 $f'(0) = 0$, 否则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ 不存在. 进而 $f''(0) = -1$. 故 $x = 0$ 是极大值点.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$, 则下述正确的有 ().

多选题(10分) (难度: 中)

A. $f(0) = -1$.

63人 79.7%



B. $f'(0) = \frac{1}{2}$.

58人 73.4%



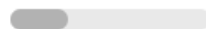
C. $f''(0) = -\frac{2}{3}$.

59人 74.7%



D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{3}$.

23人 29.1%



答题数据分析 答对: 42 答错: 37 未答: 9 正确率: 53.16%

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} + \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(0) + 1) + (f'(0) - \frac{1}{2})x + (\frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{3})x^2 + o(x^2)}{x^2} \end{aligned}$$

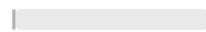
故有 $f(0) = -1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{2}{3}$. 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2}$ 不存在.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有定义。则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导当且仅当 () .

单选题(10分) (难易度: 中)

A. $\lim_{h \rightarrow -\infty} h(f(\frac{1}{h}) - f(0))$ 存在.

1人 1.3%



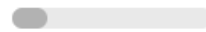
B. $\lim_{h \rightarrow +\infty} h(f(\frac{1}{h}) - f(0))$ 存在.

0人 0%



C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ 存在.

14人 17.9%



D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-h)}{h}$ 存在.

63人 80.8%



答题数据分析 答对: 63 答错: 15 未答: 10 正确率: 80.77%

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $\forall x \in (0, +\infty), f''(x) > 0$. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 令 $a_n = f(n)$, 则下述结论必成立的是().

单选题(10分) (难易度: 中)

- | | | |
|--|-----------|--|
| <input type="radio"/> A. 若 $a_1 > a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必收敛. | 2人 2.5% | <div style="width: 2.5%;"></div> |
| <input type="radio"/> B. 若 $a_1 > a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必发散. | 3人 3.8% | <div style="width: 3.8%;"></div> |
| <input type="radio"/> C. 若 $a_1 < a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必收敛. | 2人 2.5% | <div style="width: 2.5%;"></div> |
| <input checked="" type="radio"/> D. 若 $a_1 < a_2$, 则 $\{a_n\}$ 必发散. | 72人 91.1% | <div style="width: 91.1%; background-color: #00a0c0;"></div> |

答题数据分析 答对: 72 答错: 7 未答: 9 正确率: 91.14%

$$f(2) - f(1) = f'(\xi) > 0$$

$$f(n) - f(\xi) = f'(\xi)(n - \xi) + \frac{f''(\eta)}{2}(n - \xi)^2 \geq f'(\xi)(n - \xi) \rightarrow +\infty$$

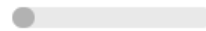
选项 AB 的反例考虑 $f(x) = x^2, f''(x) = 2.g(x) = -e^{-\frac{1}{x^2}}, g''(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(6x^2 - 4)}{x^6}$.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^\beta}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 α, β 是正常数, 则当且仅当下述条件()满足时, 必有 $f'(0)$ 存在, 但 $f''(0)$ 不存在.

单选题(10分) (难度: 中)

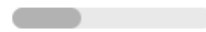
A. $1 \leq \alpha \leq \beta + 1$.

9人 11.5%



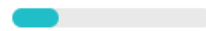
B. $1 < \alpha \leq \beta + 1$.

27人 34.6%



C. $1 < \alpha \leq \beta + 2$.

18人 23.1%



D. $\beta + 1 < \alpha \leq \beta + 2$.

24人 30.8%



答题数据分析 答对: 18 答错: 60 未答: 10 正确率: 23.08%

$f(x)$ 偶函数, 仅需考虑 $x \geq 0$ 部分.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin x^{-\beta}$$

由于 $\beta > 0, x^{-\beta} \rightarrow \infty$. 故当且仅当 $\alpha - 1 > 0$ 时上述极限存在且等于 0. 另外 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta}$.

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-2} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-2} \cos \frac{1}{x^\beta}$$

显然当且仅当 $\alpha - 2 > 0, \alpha - \beta - 2 > 0$ 时上述极限存在且等于 0. 故 $\alpha \leq \beta + 2$ 时上述极限不存在.

6. 设 $f(x) = e^{-x^2}$, 则 $f^{(2022)}(0) = (\quad)$.

单选题(10分) (难易度: 中)

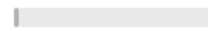
A. $\frac{1}{1011!}$

3人 3.9%



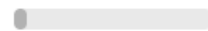
B. $-\frac{1}{1011!}$

2人 2.6%



C. $\frac{2022!}{1011!}$

5人 6.5%



D. $-\frac{2022!}{1011!}$

67人 87%



答题数据分析

答对: 67

答错: 10

未答: 11

正确率: 87.01%

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

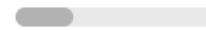
比较系数得 $\frac{f^{(2022)}(0)}{2022!} = \frac{(-1)^{1011}}{1011!}$

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, $x_0 \in (a, b)$. 则以下说法正确的是 ().

多选题(10分) (难度: 中)

A. 如果 x_0 是 f 在 (a, b) 内唯一的极值点, 则 x_0 也是 f 在 $[a, b]$ 上的最值点.

22人 28.6%



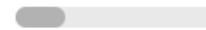
B. 如果 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 f 的极值点.

74人 96.1%



C. 如果 f 在点 x_0 二阶可导, 且 x_0 是 f 的极小值点, 则 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) > 0$.

19人 24.7%



D. 如果 f 在点 x_0 二阶可导, 且 x_0 是 f 的极小值点, 则 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) \geq 0$.

55人 71.4%



答题数据分析 答对: 37 答错: 40 未答: 11 正确率: 48.05%

8. 曲线 $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线共有()条.

单选题(10分) (难度:中)

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

0人 0% 

3人 3.9% 

20人 26.3% 

53人 69.7% 

答题数据分析 答对: 53 答错: 23 未答: 12 正确率: 69.74%

显然 $x = 2$ 是垂直渐近线. 另外

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) - x = 2$$

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界且可导, 则以下结论错误的是().

多选题(10分) (难度: 中)

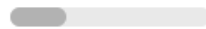
A. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

41人 53.9%



B. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

21人 27.6%



C. 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

70人 92.1%



D. 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

65人 85.5%



答题数据分析 答对: 34 答错: 42 未答: 12 正确率: 44.74%

选项 B, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A \neq 0$. 不妨设 $A > 0$, 则 $\exists M > 0, \forall x > M, f'(x) > \frac{A}{2} > 0$. $f(x) - f(M) = f'(\xi)(x - M) > \frac{A}{2}(x - M) \rightarrow +\infty$. 与 $f(x)$ 有界矛盾.

选项 CD 的反例, 考虑 $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$ 即可. 选项 A 的反例参考第十次习题课 PDF.

10. 设 $y = y(x)$ 是方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ 的解且满足 $y(0) = 0, y'(0) = 0$. 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $y(x)$ 等价的无穷小量是().

单选题(10分) (难度: 中)

- | | | |
|--|-----------|---|
| <input type="radio"/> A. $1 - \cos \sqrt{x}$. | 3人 3.8% |  |
| <input type="radio"/> B. $\sin x^2$. | 3人 3.8% |  |
| <input type="radio"/> C. $\ln(1 - x^2)$. | 6人 7.6% |  |
| <input checked="" type="radio"/> D. $\ln \sqrt{1 + x^2}$. | 67人 84.8% |  |

答题数据分析 答对: 67 答错: 12 未答: 9 正确率: 84.81%

0 带入上述等式, 得 $y''(0) = 1$. 故

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$