答案仅供参考，不保证完全正确，也不一定是最优解，欢迎指出错误或提出更好的解法. —rzm

Problem 1. (10 points)

叙述数列收敛的柯西收敛准则；并用该准则证明：

$$\text{数列}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{(k+1)}}{k^{2024}}\right\}\text{收敛.}$$

Solution

Cauchy 收敛准则： $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,m>N,$ 都有$|a_n-a_m|<\varepsilon,$ 则数列$\{a_n\}$收敛.

设数列 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{(k+1)}}{k^{2024}}$ ，不妨设 $m<n$ ，则

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{(-1)^{(k+1)}}{k^{2024}}\right|\\&\le\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^{2024}}<\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^{2}}\\&<\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}\end{aligned}$$

因此，只需令 $\dfrac{1}{m}<\varepsilon$ ，故取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor$ ，则 $\forall n>N,m>N,$ 都有$|a_n-a_m|<\varepsilon$，据 Cauchy 收敛定理知原命题成立.

Problem 2. (35 points)

(a) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}$.

Solution

设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ，则 $f(x)\in C[0,1]$ ，故 $f(x)$ 可积且有原函数 $\arctan x$

由于 $\dfrac{n}{n^2+k^2}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\text{原式}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\arctan x\,|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

(b) 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Solution

令 $t=x-1$ ，则 $t\to 0$ ，用两次 L' Hospital 法则

$$\begin{aligned}
原式 &= \lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^{t+1}-t-1}{-t+ln(1+t)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1+\ln(t+1))(t+1)^{t+1}-1}{-1+\frac{1}{t+1}}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{((1+\ln(t+1))^2+\frac{1}{t+1})(t+1)^{t+1}}{-\frac{1}{(t+1)^2}}\\
&= -2
\end{aligned}$$

(c) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} t^2e^{\sin t}\,\mathrm{d}x}{\ln(1+x^6)}$.

Solution

设 $f(x)=\int_0^{x^2}t^2e^{\sin t}\mathrm{d}x$ ，由于被积函数在 $\mathbb{R}$ 上连续，知 $f(x)\in D(\mathbb{R})$ ，且 $f'(x)=2x\cdot x^4e^{\sin x^2}$

当 $x\to 0$ 时，分子和分母都趋向0，可以使用 L' Hospital 法则

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5e^{\sin x^2}}{\frac{6x^5}{1+x^6}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^6)e^{\sin x^2}}{3}=\frac{1}{3}$$

(d) 求 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution

$$\begin{aligned}
原式 &= -\int_1^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= -\left(\frac{\arctan x}{x}\right)\Bigg|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x^2\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x^2\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_1^{+\infty}\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

(e) 求双扭线 $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ 所围平面图形的面积.

Solution

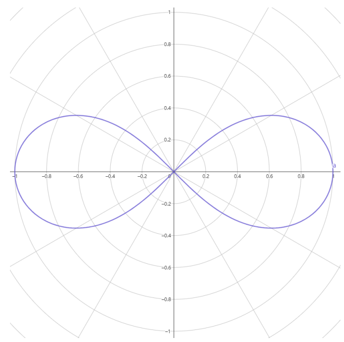

图 1: 双扭线图像

图 1 表明双扭线关于x轴与y轴对称，故我们可以只计算位于第一象限的部分面积

$$原式 = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = (\sin(2\theta))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

Problem 3. (10 points)

证明 Cantor 定理：若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续.

Solution

设 $E = \{t \in (a,b] \mid f(x)在[a,t]上一致连续\}$.

由 $f(x) \in C[0,1]$ ，据 Cauchy 收敛定理知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in [0,\delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，故 $f(x)$ 在 $[0,\delta)$ 上一致连续，所以 $\frac{\delta}{2} \in E$.

$E \neq \emptyset$ 且有上界 1，由确界原理知 E 有上确界，记 $\sup E = \alpha$.

下证 $\alpha = 1$:

假设 $\alpha \in (0,1)$，则 $\forall \varepsilon > 0$，

由 $f(x) \in C[0,1]$ ，据 Cauchy 收敛定理，取 $\varepsilon_0 = \varepsilon$, 则$\exists \delta_0 > 0, \forall x_1, x_2 \in (\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0$.

由 α 为 E 的上确界，$\exists \beta > \alpha - \frac{\delta}{2}, \beta \in E$ ，即 $f(x)$ 在 $[0,\beta]$ 上一致连续. 取 $\varepsilon_1 = \epsilon$, 则$\exists \delta_1 > 0, \forall x_1, x_2 \in [0,\beta]且|x_1 - x_2| < \delta_1, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1$

取 $\delta = \min\{\frac{\delta_0}{2}, \delta_1\}$，则 $\forall x_1, x_2 \in [0,\beta]且|x_1 - x_2| < \delta$，$x_1$ 与 x_2 必定同时落在 $[0,\beta]$ 内或 $(\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0)$ 内. 故 $|f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon$. 因此 $f(x)$ 在 $[0, \alpha + \frac{\delta_0}{2}]$ 上一致连续.

由此可知 $\alpha + \frac{\delta_0}{2} \in E$，与 $\alpha = \sup E$ 矛盾. 故 $\alpha = 1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续.

Problem 4. (10 points)

求函数 $f(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值.

Solution

分以下三种情况讨论：

(a) $x\geq 1$，则

$$f(x)=x\int_{-1}^{1}e^{t^2}\mathrm{d}t-\int_{-1}^{1}te^{t^2}\mathrm{d}t=x\int_{-1}^{1}e^{t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left(e^{t^2}\right)\Big|_{-1}^{1}\geq\int_{-1}^{1}e^{t^2}\mathrm{d}t$$

(b) $x\leq -1$，则

$$f(x)=\int_{-1}^{1}te^{t^2}\mathrm{d}t-x\int_{-1}^{1}e^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(e^{t^2}\right)\Big|_{-1}^{1}-x\int_{-1}^{1}e^{t^2}\mathrm{d}t\geq\int_{-1}^{1}e^{t^2}\mathrm{d}t$$

(c) $-1<x<1$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=x\int_{-1}^{x}e^{t^2}\mathrm{d}t-\int_{-1}^{x}te^{t^2}\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}te^{t^2}\mathrm{d}t-x\int_{x}^{1}e^{t^2}\mathrm{d}t\\&=x\left(\int_{-1}^{x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_{x}^{1}e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)+e-e^{x^2}\end{aligned}$$

求导可得 $f'(x)=\int_{-1}^{x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_{x}^{1}e^{t^2}\,\mathrm{d}t,\quad f''(x)=2e^{x^2}>0$，故 $f(x)$ 单调递增.

由 $y=e^{x^2}$ 为偶函数，知 $f'(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减，在 $[0,1]$ 上单调递增，在 $x=0$ 处取得最小值 $e-1$.

由于 $\int_{-1}^{1}e^{t^2}\,\mathrm{d}t=2\int_{0}^{1}e^{t^2}\,\mathrm{d}t>2\int_{0}^{1}te^{t^2}\,\mathrm{d}t=e-1$，故 $e-1$ 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值.

Problem 5. (10 points)

证明导函数极限定理：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且 $f'(0)<a<f'(1)$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=a$.

Solution

设 $g(x)=f(x)-ax$，则只需证明 $\exists\xi\in(0,1),g'(\xi)=0$.

$g(x)=f(x)-ax\in C[0,1]$，由闭区间上连续函数的最值定理可知 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最小值.

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}<0$，由局部保号性可知 $\exists\delta_1>0,\forall x\in(0,\delta_1),g(x)<g(0)$.

$g'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x}>0$，由局部保号性可知 $\exists\delta_2>0,\forall x\in(1-\delta_2,1),g(x)<g(0)$.

所以 $g(0)$ 和 $g(1)$ 都不是 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值，故最小值在 $(0,1)$ 上的某个点 ξ 处取得，xi 同时也是极小值.

又因为 $g(x)\in D[0,1]$，由 Fermat 引理可知 $g'(\xi)=0$，得证.

Problem 6. (10 points)

设函数 $f(x) \in R[0,1]$，且 f 在 $x=0$ 处右连续. 证明：函数 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ (0 \leq x \leq 1)$ 在 $x=0$ 处的右导数等于 $f(0)$.

Solution

$f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，故 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in(0, \delta),|f(x)-f(0)|<\varepsilon$，即 $f(0)-\varepsilon<f(x)<f(0)+\varepsilon$.

由定积分保序性，可知 $\forall x \in(0, \delta),(f(0)-\varepsilon) x<\varphi(x)<(f(0)+\varepsilon) x$.

所以 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in(0, \delta), f(0)-\varepsilon<\dfrac{\varphi(x)}{x}<f(0)+\varepsilon$

所以 $\varphi_{+}^{\prime}(0)=\lim\limits_{x \rightarrow 0^{+}} \dfrac{\varphi(x)}{x}=f(0)$

Problem 7. (10 points)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数，证明：

$$\lim _{n \rightarrow+\infty} \sum_{k=1}^n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2 k-1}{2 n}\right)\right]=\frac{f(1)-f(0)}{2}$$

.

Solution

由条件知 $f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$，据 Lagrange 中值定理，$\sum\limits_{k=1}^n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2 k-1}{2 n}\right)\right]=\frac{1}{2 n} \sum\limits_{k=1}^n f^{\prime}\left(\xi_k\right)$，且有 $\xi_k \in\left(\frac{2 k-1}{2 n}, \frac{k}{n}\right) \subset\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$

取分割 Δ: $x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, \cdots, x_k=\frac{k}{n}, \cdots, x_n=1$ 与介点组 $\{\xi_k\}$，由 $f^{\prime}(x) \in C[0,1]$，知 $f^{\prime}(x)$ 黎曼可积且有原函数 $f(x)$.

故

$$\lim _{n \rightarrow+\infty} \sum_{k=1}^n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2 k-1}{2 n}\right)\right]=\frac{1}{2} \lim _{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f^{\prime}\left(\xi_k\right) \frac{1}{n}=\frac{1}{2} \int_0^1 f^{\prime}(x)\,\mathrm{d} x=\frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Problem 8. (5 points)

设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶连续的导函数，且存在常数 $C>0$，使得

$$\sup _{x \in \mathbb{R}}\left(|x|^2|f(x)|+\left|f^{\prime \prime}(x)\right|\right) \leq C$$

.

证明：存在常数 $M>0$，使得 $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}}\left(\left|x f^{\prime}(x)\right|\right) \leq M$.

Solution

由上确界定义可知 $\forall x\in\mathbb{R}, |x|^2|f(x)|\le C,\ |f''(x)|\le C.$

(a) $|x|\le 1$

$f(x)$ 有二阶连续导数，故 $f'(x)\in C[-1,1]$，进而 $xf'(x)\in C[-1,1]$，由有界性定理可知 $\exists M_1>0,\forall x\in[-1,1],|xf'(x)|\le M_1.$

(b) $|x|>1$

$f(x)$ 有二阶连续导数，$\forall|x_0|>1$，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \tag{1}$$

代入 $x=x_0+\dfrac{1}{x_0}$，有

$$f(x_0+\frac{1}{x_0})=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{x_0}+\frac{f''(\xi)}{2x_0^2} \tag{2}$$

两边同乘 x_0^2，移项得

$$x_0f'(x_0)=x_0^2f(x_0+\frac{1}{x_0})-x_0^2f(x_0)-\frac{f''(\xi)}{2} \tag{3}$$

等式右边第二项与第三项都是有界量，故只需证明第一项也为有界量，考虑利用有界量 $(x_0+\frac{1}{x_0})^2f(x_0+\frac{1}{x_0})$ 进行估计：

$$\begin{aligned}
\left|x_0^2f(x_0+\frac{1}{x_0})\right| &= \left|(x_0+\frac{1}{x_0})^2f(x_0+\frac{1}{x_0})-2f(x_0+\frac{1}{x_0})-\frac{f(x_0+\frac{1}{x_0})}{x_0^2}\right| \qquad (4)\\
&\le \left|(x_0+\frac{1}{x_0})^2f(x_0+\frac{1}{x_0})\right|+\left|2f(x_0+\frac{1}{x_0})\right|+\left|\frac{f(x_0+\frac{1}{x_0})}{x_0^2}\right| \qquad (5)\\
&< \left|(x_0+\frac{1}{x_0})^2f(x_0+\frac{1}{x_0})\right|+3\left|x_0^2f(x_0+\frac{1}{x_0})\right| \qquad (6)\\
&\le 4C \qquad (7)
\end{aligned}$$

将(3)式取绝对值，再将(7)式代入，得

$$\begin{aligned}
|x_0f'(x_0)| &\le \left|x_0^2f(x_0+\frac{1}{x_0})\right|+\left|x_0^2f(x_0)\right|+\frac{|f''(\xi)|}{2}\\
&\le 4C+C+\frac{C}{2}\\
&=\frac{11C}{2}
\end{aligned}$$

综上，取 $M=\max\left\{M_1,\frac{11C}{2}\right\}$，则 $\forall x\in\mathbb{R},|xf'(x)|\le M$，故 M 为 $|xf'(x)|$ 的一个上界，必然不小于其上确界，因此 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(|xf'(x)|)\le M.$