2022-2023学年春夏学期数学分析(甲)II(H)第一次小测

1. 下述陈述错误的是 (　　).

多选题(10 分)

A. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在区间I 上一致收敛，且 $g(x)$ 是 I 上的有界函数, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} g(x)u_n(x)$ 在I 上一致收敛.

B. 级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在区间I 上 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在I 上一致收敛.

C. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ 在$(0,1)$内一致收敛.

D. 设$a_n > 0$, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则存在 $N > 0,$ 当$n > N$时，有 $a_n < \frac{1}{n}$.

2. 函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上不一致收敛于函数$f(x)$的定义是(　　).

单选题(10 分)

A. $\exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+$, 当$n > N$时，$\exists x \in I,$ 使得 $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon_0$.

B. $\exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+$, $\exists n > N$, $\exists x \in I,$ 使得 $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon_0$.

C. $\exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+, \exists x \in I$, 当$n > N$时，有 $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon_0$.

D. $\exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{Z}^+$, $\exists n > N$, $\forall x \in I,$ 使得 $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon_0$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 5-3x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$, $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\pi x\ (x \in \mathbb{R})$, 其中 $a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx\ (n \in \mathbb{N})$, 则 $S(-\frac{9}{2}) =$ (　　).

单选题(10 分)

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

4. 设幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$的收敛半径是$1$，则级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(2^n a_n)$(　　).

单选题(10 分)

A. 绝对收敛

B. 的敛散性无法确定

C. 发散

D. 条件收敛

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$ 的和函数是(　　).

单选题(10 分)

A. $-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2,\ x\in(-1,1).$

B. $\frac{x^2}{1-x},\ x\in(-1,1).$

C. $-\frac{x^2}{1-x},\ x\in(-1,1).$

D. $\left(\frac{x}{1-x}\right)^2,\ x\in(-1,1).$

6. 若$\{f_n(x)\}$ 与$\{g_n(x)\}$都在$\mathbb{R}$上一致收敛，那么 以下说法正确的是(　　).

多选题(10 分)

A. 当$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$都在 $\mathbb{R}$上一致有界时，$\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$在 $\mathbb{R}$上一致收敛.

B. $\{f_n(x)+g_n(x)\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛.

C. 当$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$中的其中一个函数列在 $\mathbb{R}$上一致有界时，$\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$在 $\mathbb{R}$上一致收敛.

D. $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛.

7. 下列函数项级数在区间$[0,1]$上一致收敛的是(　　).

单选题(10 分)

A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x)x^n.$

B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-x)x^n.$

C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$

D. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}xe^{-nx^2}.$

8. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则下述结论一定成立的是(　　).

单选题(10 分)

A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)^3$ 收敛.

B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cdot a_{n+1}$ 收敛.

C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

D. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

9. 已知 $f(x)$ 是$\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的周期函数，且 对$\forall x\in[0,2\pi), f(x)=x^2$. 又设 $g(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in(0,1]\\ 1, & x=0\end{cases}$. 则下述命题正确的有（　）.

多选题(10 分)

A. f 的Fourier级数在$\mathbb{R}$ 上处处收敛.

B. $\int_0^1 g(x)dx=\frac{\pi^2}{12}$.

C. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{8}$.

D. $f(x)\sim\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\cos(nx)-\frac{\pi}{n}\sin(nx)\Big)$.

10. 已知$a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$, 若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛” 是“$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 绝对收敛”的（　）.

单选题(10 分)

A. 既非充分也非必要条件.

B. 充分必要条件.

C. 充分不必要条件.

D. 必要不充分条件.