1. 下述陈述错误的有( ).

多选题 (10 分) 10 分 (难易度: 中)

- [x] A. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛.
- [x] B. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.
- [x] C. 若函数列 $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，则 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上也一致收敛。
- [x] D. 设 $a_n>0$,若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

A: $u_n(x)=(-1)^{\frac{1}{n}}$

B. $u_n(x)=\begin{cases} x^n & 0\le x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

C. $f(x)=g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

D. $a_{2n-1}=2n$ $\quad a_{2n}=\frac{1}{(2n)^4}$

2. 下述说法正确的有( ).

多选题 (10 分) 10 分 (难易度: 中)

- [x] A. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，且 $a_n\le u_n\le b_n$，那么 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 也收敛.
- [x] B. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，那么 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.
- [ ] C. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且 $|b_n|\le|a_n|$，那么 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.
- [ ] D. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，那么 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.

A、柯西收敛准则 …… B. 显然的吧

C $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$ D. $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad b_n=\frac{1}{n}+(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

3. 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{2^n n!}$的和为（ ）.

单选题 (10 分)　10 分　(难易度: 中)

- A. $2\sqrt{e}-1$.
- B. $\sqrt{e}$.
- C. 1
- D. $\sqrt{e}-1$.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{2^n\cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$$

$$= \sqrt{e}+\sqrt{e}-1 = 2\sqrt{e}-1$$

4. 下列无穷级数中收敛的是(　).

单选题 (10 分)　10 分　(难易度: 中)

- A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 3^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$.
- B. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$.
- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.
- D. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

A $3^{\frac{1}{n}}\downarrow$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛

B. $\sin\frac{1}{\ln n} \sim \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad (n\to+\infty)$

C. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

D. $\frac{1}{\sqrt{n}+1} + \frac{-1}{\sqrt{n+1}-1} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-2}{(\sqrt{n}+1)\cdot(\sqrt{n+1}-1)}$

$$= \underbrace{\frac{-2}{(\sqrt{n+1})\cdot(\sqrt{n+1}-1)}}_{\sim \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}-1)\cdot(\sqrt{n}+1)}}_{\sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

5. 下述函数列中一致收敛的是 ( ).

单选题 (10 分) 10 分 (难易度: 中)

- A. $f_n(x) = n\sin\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
- B. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
- C. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.
- D. $f_n(x) = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

A. $f(x) = \sin x$ ， 取 $x = \frac{n\pi}{2}$

B、$f(x)=0$ $f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{n}$

$\Rightarrow f_n(x) \leq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$

C $f(x)=0$ $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$

D. $f(x)=0$ $f_n(n)=1$

6. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散,则下列级数中必定发散的是( ).

单选题 (10 分) 10 分 (难易度: 中)

- A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$.
- B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$.
- C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.
- D. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$.

A. $a_n = n^2$ B. $a_n = \frac{1}{n}$ D. $a_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{n}, & n\text{为完全平方数} \end{cases}$

$\frac{1}{n^2}$，构造

C. 若 $\frac{a_n}{1+a_n}$ 收敛，记 $\frac{a_n}{1+a_n}=b_n$

$\exists N$，对 $n>N$ 有 $b_n<\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{a_n}{1+a_n}<\frac{1}{2} \Longrightarrow a_n<1$

$\Longrightarrow a_n<(1+a_n)b_n<2b_n \Longrightarrow a_n$ 收敛 矛盾…

7. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径是 1，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_n$ (　　).

单选题 (10 分)　10 分　(难易度: 中)

- A. 发散
- B. 条件收敛
- C. 绝对收敛
- D. 的敛散性无法确定

$a_n(x-1)^n \Longrightarrow a_n\cdot x^n \quad |x|<1$

8. 下述命题中正确的有 (　　).

单选题 (10 分)　10 分　(难易度: 中)

- A. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$ 收敛.
- B. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.
- C. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且 $\{a_n\}$ 单调，那么 $\lim_{n\to+\infty} na_n=0$.
- D. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ 也收敛.

A. $a_{3n+1}=a_{3n+2}=-\frac{1}{n}$　　B.D) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$

$a_{3n+3}=\frac{2}{n}$

C. $a_n\downarrow 0$.　$a_{[\frac{n}{2}+1]}+\cdots+a_n \geq 2n\cdot a_n$ …… …

(作业题) …

9. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$, 记$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$.则有（ ）.

单选题 (10 分)　10 分　(难易度: 中)

A. $S(0)=0, S(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$.

B. $S(0)=0, S(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$.

C. $S(0)=0, S(\frac{3}{2})=1$.

D. $S(0)=0, S(\frac{3}{2})=-1$.

$S(0)=0 \qquad S(\frac{3}{2})=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{3}{2}n\pi$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1}(-1)^n \qquad b_1 = 2\int_0^1 \sin^2 n\pi x$

$b_{2n-1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2n-2)\pi x - \cos(2n)\pi x \, dx \qquad = \int_0^1 1-\cos 2n\pi x$

$= \frac{\sin(2n-2)\pi x}{(2n-2)\pi} - \frac{\sin(2n)\pi x}{(2n)}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \qquad = 1 - \frac{\sin 2n\pi}{2n\pi}\Big|_0^1 = 1$

$= \frac{\sin(n-1)\pi}{(2n-2)\pi} - \frac{\sin n\pi}{2n} = 0 \qquad (n\ge 2)$

$b_1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi x \cdot \sin x\pi dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1-\cos 2x\pi = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}$

10. 已知 $\forall x\in(-1,1)$, 有 $\frac{1}{1+x+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, 其中 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是一实数列，则(　).

多选题 (10 分)　10 分　(难易度: 中)

A. $a_4=-1$.

B. $a_2=0$.

C. $a_{2022}=1$.

D. $a_6=1$.

$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{x}{x^3-1} - \frac{1}{x^3-1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$