2022-2023学年秋冬学期竺院数学I辅学授课

期末复习

授课人：邱日宏

写在前面

当你看到这一段话的时候，也许此时距离期末考试的时间已经不多了。我们如何抓住最后的时光，进一步巩固和复习数学分析的知识呢？

- 基础定理的定义
- 课本出现的例题
- 历年考试的试卷

以上内容中以课本基础知识为首要，在牢固掌握基础知识和定理概念的基础上通过适当习题的训练有助于帮助大家在考场上快速应对考试题目，取得理想的成绩。

本文档中的内容以基础知识梳理为主，主要用于帮助期末补天。如果您已经完成了上面所提及的三部分内容的梳理，或觉得基础知识已经非常牢固的话，这份材料可能并不适合您，您也可以选择在课外参考更多的题目与材料进一步提升自己。

数列极限

【上界】：设S是一个非空数集，如果$\exists M \in R$，使得$\forall x \in S, x \leq M$，则称$M$是$S$的一个上界

【上确界】：

$$\beta = \sup S$$

1. β是数据S的上界：$\forall x \in S, x \leq \beta$
2. 任何小于β的数不是数集S的上界：$\forall \epsilon > 0, \exists x \in S, x > \beta - \epsilon$

【下界】：设S是一个非空数集，如果$\exists M \in R$，使得$\forall x \in S, x \geq M$，则称$M$是$S$的一个下界

【下确界】：

$$\alpha = \inf S$$

1. α是数据S的下界：$\forall x \in S, x \geq \alpha$
2. 任何大于α的数不是数集S的下界：$\forall \epsilon > 0, \exists x \in S, x < \alpha - \epsilon$

【确界原理】

非空有上(下)界的数集，必有上(下)确界。

【例题】

设f,g为D上的有界函数，证明

1. $\inf\{f(x)+g(x)\}\leq\inf f(x)+\sup g(x)$
2. $\sup f(x)+\inf g(x)\leq\sup\{f(x)+g(x)\}$

> 解析
>
> 1. 此题的关键在于理清上下确界与函数之间的联系，同时明白，上下确界只是一个数，是可以进行放缩的。
>
> $\inf\{f(x)+g(x)\}\leq\inf\{f(x)+\sup g(x)\}=\inf f(x)+\sup g(x)$
>
> 2. 与1. 相同

【2021-数学分析期末】

设$f(x)$在$[0,1]$上有定义，证明：

$$\sup_{x\in[0,1]}f(x)-\inf_{x\in[0,1]}f(x)=\sup_{x',x''\in[0,1]}|f(x')-f(x'')|$$

> 解析
>
> （思路）
>
> 对于确界的证明，我们并没有许多太好的方法，只能是利用确界的定义和放缩来完成。这里，$f(x)$的上下确界都是一个确定的数，我们只需要证明$|f(x')-f(x'')|$在[0,1]的上确界就是$\sup_{x\in[0,1]}f(x)-\inf_{x\in[0,1]}f(x)$即可。
>
> 证明上确界时，根据定义分别证明两条性质，分步写出即可完成证明

（其他学长的解答）

$$\text{由}sup\ f(x)\text{与}inf\ f(x)\text{第一条公理化定义可以得到}\forall x\in[0,1]\text{有}inf\ f(x)\leq f(x)\leq sup\ f(x)$$
$$\text{则}\forall x',x''\in[0,1],\text{不妨假设}f(x')>f(x'')\text{则}f(x')-f(x'')\leq sup\ f(x)-inf\ f(x)$$
$$\text{由第二条公理化定义可以得到}:\forall\epsilon>0,\exists x_0,x_1\text{使得}f(x_0)<inf\ f(x)+\frac{\epsilon}{2},f(x_1)>sup\ f(x)-\frac{\epsilon}{2}$$
$$\text{则}f(x_1)-f(x_0)>sup\ f(x)-inf\ f(x)-\epsilon(\text{上确界第二条公理化定义})\text{即证}.$$

【数列极限定义】

设$\{a_n\}$是一个数列，若存在确定的数a，对$\forall\epsilon>0$, 总$\exists N>0$，使当$n>N$时, 都有$|a_n-a|<\epsilon$, 则称数列$\{a_n\}$收敛于a, 定数a称为数列$\{a_n\}$的极限, 记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$否则称数列$\{a_n\}$不收敛.

【数列极限性质】

1. 惟一性 若数列收敛，则它只有一个极限
2. 有界性 若数列收敛，则存在正数M，使得$|a_n|\leq M$
3. 保号性
4. 保不等式性
5. 迫敛性（夹逼定理）$a_n\leq b_n\leq c_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$

【数列极限的四则运算】

加法、减法、乘法、除法（注意成立的条件：极限存在！）

【2021-数学分析期末】

证明：无上界数列必存在发散于无穷大的子列

> 解析
>
> （思路）
>
> 在这一题中，由于题目要求我们证明的是**存在性**，因此我们可以通过构造一个发散于无穷大的子列来证明存在性。
>
> 根据定义，无上界数列对任意正整数N，都数列中都存在无穷多项大于N。对于我们所构造数列的第k项，我们总能够在原数列的n_{k-1}项之后的无穷项中找到一项比k更大。因此，最终该数列会发散到正无穷

（其他学长的解答）

$$\text{假设数列}\{a_n\}\text{无上界, 则由定义}:\forall N>0,\exists n,\text{使得}a_n>N(\text{这样的}a_n\text{一定有无限个, 否则取前面}max\text{即有界})$$
$$\text{我们不妨令}N=1,\text{则}\exists n_1\text{使得}a_{n_1}>1,\text{再令}N=2,\exists n_2>n_1(\text{否则, 则仅有有限个}a_{n_k}>2)\text{使得}a_{n_2}>2$$
$$\text{以此类推可以得到子列}\{a_{n_k}\}\text{使得}a_{n_k}>k,\text{则可得}\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty$$

【Cauchy准则】

数列$\{a_n\}$收敛，当且仅当，对于任意给定的$\epsilon>0$，存在正整数N，使得当任意$n,m>N$时，都有$|a_m-a_n|<\epsilon$成立。

（注意点）：这里的n,m是需要任意取的，如果不是任意的话有时候可能会导致结论并不成立。

【单调有界定理】

单调有界数列必收敛

数列收敛 => 数列有界

数列无界 => 数列发散

（以上两条反之不成立！）

【数列与子列的极限关系】

任意子列收敛与数列收敛的等价性：数列收敛则任一子列均收敛

应用：

数列的某一子列不收敛可以推出数列不收敛

【海涅归结原理】

$\lim_{x\to x_0}f(x)\to A$ 等价于 $\forall x_n\to x_0,\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$

应用：

1. 已知某一函数极限，在该函数中通过合适的方式取数列，证明数列极限存在
2. 存在$x_n \to x_0$，但是$f(x_n)$发散，证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

【数列收敛证明思路】

- 用定义证明极限
- 用Cauchy收敛定理证明极限
- 夹逼定理
- 单调有界定理
- 数列与子列的极限关系
- 函数与数列的极限关系

【数列极限计算求解思路】

- 用定义证明极限
- 夹逼定理
- 等价代换
- Stolz定理（虽然不考，但是却是一个好用的工具）

【2018-数学分析期中】

设$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，用定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=\alpha$$

> 解析
>
> 根据$\epsilon-N$语言的定义完成证明

根据题意$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，由极限的定义可知，

对$\forall\epsilon$，存在相应的N_1，使得当$n>N_1$时，

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$$

因此，我们可以将α_n数值范围分成两个部分分别求解：

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}-\alpha\right| \\
&=\left|\frac{(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_n-\alpha)}{n}\right| \\
&\le\left|\frac{(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_{N_1}-\alpha)}{n}\right|+\left|\frac{\alpha_{N_1+1}-\alpha}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{\alpha_n-\alpha}{n}\right| \\
&<\left|\frac{(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_{N_1}-\alpha)}{n}\right|+\frac{(n-N_1)\varepsilon}{n} \\
&=\frac{|(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_{N_1}-\alpha)|-N_1\varepsilon}{n}+\varepsilon
\end{aligned}$$

对于前半部分，分子固定后是一个有限的数，极限趋于0，即

对上述给定的ϵ，存在N_2,使得当$n > N_2$时，

$$\left|\frac{|(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_{N_1}-\alpha)|-N_1\varepsilon}{n}\right|<\varepsilon$$

从而

$$\left|\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}-\alpha\right|<2\varepsilon$$

【2021-数学分析期末】

叙述Cauchy收敛原理，并证明数列$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k(k+1)}$

> 解析
>
> （思路）
>
> 在这道题目中已经有了比较明显的提示，显然我们应该用Cauchy收敛定理来处理类似的求和数列的问题。根据柯西收敛定理的定义，做差之后再进行放缩即可证明数列收敛。

（其他学长的解答）

$$Cauchy\text{收敛准则}:\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,\text{有}|a_n-a_m|<\epsilon\text{则称数列}\{a_n\}\text{收敛}$$

$$\forall\epsilon>0.\exists N=[\frac{1}{\epsilon}],\forall n,m>N,\text{有}|\sum_{k=1}^{n}\frac{sink}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{m}\frac{sink}{k(k+1)}|=|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{sink}{k(k+1)}|$$

$$\le\sum_{k=m+1}^{n}|\frac{sink}{k(k+1)}|\le\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{N}\le\epsilon$$

函数极限

【函数极限的定义】

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个去心邻域D_f中有定义，如果存在实数A，对于任意给定的$\epsilon>0$，可以找到$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时满足$|f(x)-A|<\epsilon$，则称A是函数$f(x)$在点x_0的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

类似的，我们可以给出函数的左右极限的定义

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$: ___

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$: ___

还有在正无穷、负无穷处的定义......

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$： $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)=A$： $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=A$： $\forall \varepsilon>0, \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$： $\forall \varepsilon>0, \exists X>0$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(5) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\infty$： $\forall G>0, \exists X>0$，当 $x<-X$ 时，$|f(x)|>G$.

【函数极限的性质】

- 惟一性
- 局部保序性
- 局部有界性
- 局部保号性
- 夹逼性

【函数极限四则运算】

加减乘除，依然需要注意使用条件

【函数极限充要条件】

- 海涅归结原理
- Cauchy准则

【单调有界定理】

设$f(x)$为定义在$U_+(a)$上的单调有界函数，则 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$存在。

【2020-数学分析期末】

试叙述确界原理，并用 $\epsilon-\delta$ 语言和确界原理证明：设函数f 在 $(0,1)$ 上单调有界，则极限 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 存在。

> 解析
>
> （思路）
>
> 其实这道题就是让我们证明函数版的单调有界定理。在数列中，我们就是使用确界原理证明单调有界定理的；同样，在函数中也是类似。
>
> 不失一般性，我们不妨假设f是单调递增的。利用确界原理，f有界必有下确界。根据下确界的定义，以及函数的单调性，我们就可以写出函数极限的定义了。

【两个重要极限】

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$

（证明均是采用了夹逼定理，可以参考课本上的经典证明）

【等价无穷小量、等价无穷大量】

如果你对泰勒展开十分熟悉的话，这部分其实也可以展开试试看

不定式：$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

=> 简单的解决方案：洛必达法则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

【2021-数学分析期末】

计算$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x (1+t^4)^{1/4} dt}{x^4}$

> 解析
>
> 分子有积分，似乎不好处理。但注意到在正无穷处其实出现了不定式，所以我们可以使用洛必达法则来求解。

（学长的解答）

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x (1+u^4)^{\frac{1}{4}} du}{x^4} = (L'Hospital) \lim_{x \to \infty} \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{4x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\frac{1}{x^{12}} + \frac{1}{x^8})^{\frac{1}{4}}}{4} = 0$$

连续函数

【函数的连续性】

函数$f(x)$在x_0处连续，当且仅当$f(x)$在$U(x_0)$有定义，并且$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

几个等价表述：

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, st. |x - x_0| < \delta$时,$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- $f(x_0)$有定义，且$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$
- $\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

当函数$f(x)$在x_0处**连续**时，$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)$

【连续函数的性质】

- 局部有界性
- 局部保号性
- 四则运算

反函数连续性定理：闭区间连续、严格单调 =>反函数连续且严格单调

复合函数连续性定理：（注意每一段是在何处的连续）

【函数连续性的证明思路】

- 利用定义证明
- 利用左右极限相等
- 利用序列语言证明
- 利用连续函数的四则运算

【一致连续】

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta，则 |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

【例题】

证明$f(x) = \sin x$在R上一致连续

> 解析
>
> 首先根据定义写出区间内Δy的结果，并尽可能放缩到Δx的形式。
>
> $|\sin x' - \sin x''| = 2|\cos \frac{x'+x''}{2} \sin \frac{x'-x''}{2}| \leq |x' - x''|$
>
> 随后根据相应的形式取δ，如此处取$\delta = \epsilon$

【闭区间上连续函数的整体性质】

- 有界性定理、最大最小值定理
- 介值定理、根的存在定理
- 一致连续性定理（Cantor定理）：在闭区间上连续，则一致连续

【例题】

证明方程$x = a\sin x + b, a > 0, b > 0$，至少存在一个根$\eta$且$\eta \leq a + b$

> 解析
>
> 此题需要证明根的存在性，并且指定了根的上界，我们不妨用连续函数的性质试试。
>
> 令$F(x) = x - a\sin x - b$，则$F(x)$为$[0, a+b]$的连续函数。
>
> 因为$F(0) = -b < 0, F(a+b) = (a+b) - a\sin(a+b) - b = a * [1 - \sin(a+b)] \geq 0$
>
> (1) 若$1 - \sin(a+b) = 0$，则取$\eta = a + b$
>
> (2) 若$1 - \sin(a+b) \neq 0$，则$F(a+b) > 0$，根据根的存在定理可知至少存在$\eta \in (0, a+b)$使得$F(\eta) =$

【2021-数学分析期末】

若$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续，$g(x)$在$[0,+\infty)$连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$，则$g(x)$一致连续

> 解析
>
> （思路）
>
> 在Cantor定理中，我们只能够证明闭区间上连续，则一致连续。但是在本题中我们要证明一致连续的区间是一个半开区间，虽然g(x)也连续，但却不能够直接使用Cantor定理。
>
> 为此，我们可以借助极限的定义，将$[0,+\infty)$的区间分为两段$[0,G]$和$[G,+\infty)$，在前一段中我们可以直接使用Cantor定理完成证明，在后半段，我们借助极限的定义以及一致连续的定义用$\epsilon-G$语言完成证明。

（其他学长的解答）

$$\text{考虑用定义证明一致连续, 首先对于}\lim_{x\to\infty}f(x)-g(x)=0\text{可知}$$
$$\forall\epsilon>0,\exists G>0,\forall x>G\text{有}|f(x)-g(x)|\le\frac{\epsilon}{3}\text{而}f(x)\text{又一致连续则可知}$$
$$\exists\delta_0,\forall x',x''\in(0,+\infty)\text{且}|x'-x''|<\delta_0,\text{有}|f(x')-f(x'')|\le\frac{\epsilon}{3}\text{故而可以得到}$$
$$\exists\delta_0,\forall x',x''\in(G,+\infty)\text{且}|x'-x''|<\delta_0\text{有}$$
$$|g(x')-g(x'')|\le|g(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|+|g(x'')-f(x'')|\le\epsilon$$
$$\text{再回归到}g(x)\text{的连续性上, 由}Cantor\text{定理可知, }g(x)\text{在}[0,G+\delta_0]\text{上一致连续, 合并前述两条性质有：}$$
$$\forall\epsilon>0,\exists\delta=\delta_0,\forall x',x''\in(0,+\infty)\text{且}|x'-x''|<\delta,\text{有}|g(x')-g(x'')|\le\epsilon$$
$$\text{即证}g(x)\text{的在}x\text{轴正半轴上的一致连续性质.}$$

微分学

【微分】

可微的定义：

$$\Delta y=g(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

有限增量公式：

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

【导数的定义】

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

类似的，我们可以给出单侧倒数的定义，请你补充完整

- $f'_+(x_0)=\ldots$

- $f'_-(x_0) = \ldots$

【基本初等函数的求导公式】

$$C' = 0 \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

【求导法则】

四则运算:

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

链式求导法则

$y = f(u)$在u可导, $u = g(x)$在x可导,则$y = f(g(x))$在x可导，且$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

【2021-数学分析期末】

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$，求$f'(0)$和$f''(0)$

> 解析
>
> 非常经典的根据定义求导数的题目了，依据导数的定义和极限进行求解即可。

> $$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}-1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{2(\Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin \Delta x}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$
>
> 在$x \neq 0$时，$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$
>
> $$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot \cos \Delta x - \sin \Delta x}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \cos \Delta x - \sin \Delta x}{(\Delta x)^3} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - \Delta x \cdot \sin \Delta x - \cos \Delta x}{3(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin \Delta x}{3(\Delta x)} \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$
>
> 当然，这题也可以使用泰勒展开更为简便地完成。

（其他学长的解答）

$$Taylor's\ expansion: f(x) = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)\ \text{因此} f'(0) = 1, f''(0) = -\frac{1}{6}$$

注：此处应该是有笔误，$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$

$f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{1}{3}$

【可导与连续的关系】

- 可导一定连续
- 连续不一定可导

实数系基本定理

1 **确界原理** 非空有上(下)界数集，必有上(下)确界。
2 **单调有界原理** 任何单调有界数列必有极限。
3 **闭区间套定理** 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套 , 则在实数系中存在唯一的一点ξ，使得ξ∈$[a_n, b_n]$, n=1,2,..., 即$a_n \leq \xi \leq b_n, n = 1, 2, \ldots$
4 **有限覆盖定理** 设$[a, b]$是一个闭区间，H为$[a, b]$上的一个开覆盖，则在H中存在有限个开区间，它构成$[a, b]$上的一个覆盖。
5 **Weierstrass 聚点定理** 有界数列必有收敛子列（直线上的有解无限点集至少有一个聚点）。
6 **Cauchy 收敛准则** 数列$\{a_n\}$收敛，当且仅当，对于任意给定的$\epsilon > 0$，存在正整数N，使得当$n, m > N$时，都有$|a_m - a_n| < \epsilon$成立。

实数系的六个基本定理是互相等价的，大家在复习时可以参考课本的证明再推一遍定理互证

写在最后

无论如何，非常感谢你能够看到最后。也许这并不是一份非常完整的期末复习指南，想要更加全面的复习期末考的知识，这里也非常建议你再将课本从头到尾认认真真过一遍，读透课本中的例题，并了解历年卷中知识点的考察方式。预祝大家都可以取得满意的成绩！

未详细展开的函数部分：

集合

集合、元素、集合的表示方法、集合间的运算

映射

单射、满射、双射、逆映射、复合映射

函数

基本初等函数、函数的特性

一些课上没有放进来的补充题

【Q1】

按极限定义（ε—δ 法），证明 $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} = 1.$

证明　因 $\left|\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}-1\right|=\left|\dfrac{\dfrac{7}{16x^2-9}-1}{\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}+1}\right|$

$$\leqslant\left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right|=\frac{16|1+x||1-x|}{|(4x+3)(4x-3)|}$$

先设 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$，则

$$\text{上式右端}\leqslant\frac{16\cdot 3|1-x|}{3\cdot 4\left|x-\dfrac{3}{4}\right|}$$

进一步设 $|x-1|<\dfrac{1}{\delta}$ 即　$1-\dfrac{1}{\delta}<x<1+\dfrac{1}{\delta}$，于是

$$\text{上式右端}\leqslant 32|1-x|$$

故 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{32},\dfrac{1}{8}\right\}$，则 $|x-1|>\delta$ 时有

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon$$

证毕.

【Q2】

试用确界原理证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

设 $S=\{x|f$ 在 $[a,x]$ 上有界，$x\in(a,b)\}$. 由分析可知，S 为非空有上界数集，于是由确界原理，存在 $\xi=\sup S$. 现用反证法证明 $\xi=b$.

若 $\xi<b$，由连续函数的局部有界性 $\exists\delta_0>0$，$f(x)$ 在 $(\xi-\delta_0,\xi+\delta_0)$ 内有界，即 $\exists x_0>\xi$，使 $x_0\in S$，而这与 $\xi=\sup S$ 相矛盾，所以 $\xi=b$.

再证函数 f 在 $[a,b]$ 上有界. 因为 f 在点 b 连续，于是 $\exists\delta>0$，f 在 $(b-\delta,b]$ 上有界；再由 $b=\sup S$，可知 f 在 $[a,b-\delta]$ 中有界，于是 f 在 $[a,b]$ 上有界.

【Q3】

利用区间套定理证明确界原理

设 S 为一非空有上界 M 的数集．因其非空，故有 $a_0\in S$，不妨设 a_0 不是 S 的上界（否则 a_0 为 S 的最大元，即为 S 的上确界），记 $[a_1,b_1]=[a_0,M]$．将 $[a_1,b_1]$ 二等分，其中必有一子区间，其右端点为 S 的上界，但左端点不是 S 的上界，记之为 $[a_2,b_2]$．再将 $[a_2,b_2]$ 二等分，其中必有一子区间，其右端点是 S 的上界，而左端不是 S 的上界，记之为 $[a_3,b_3]$．依此类推，得到一区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，其中 b_n 恒为 S 的上界，a_n 恒非 S 的上界，且

$$b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)=\frac{M-a_0}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$$

由区间套定理，$\exists\,\xi\in[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots)$．现证 ξ 即为 $\sup S$：

（i）因为 $\forall\,x\in S$，$x\leqslant b_n$，令 $n\to\infty$ 取极限，得 $x\leqslant\xi$，即 ξ 为 S 的上界．

（ii）$\forall\,\varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，故 $\exists\,a_n>\xi-\varepsilon$；由于 a_n 不是 S 的上界，因此 $\xi-\varepsilon$ 更不是 S 的上界．

所以 ξ 是 S 的最小上界，即 $\sup S=\xi$．

同理可证有下界的非空数集必有下确界．