2022-2023学年秋冬学期竺院数分I辅学授课

数分I期末复习

授课人：潘昶皓

Context

1. 微分中值定理

1.1相关定理描述

1.1.1 Rolle中值定理

> 设函数$f(x)$满足以下三个条件：

- $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
- $f(x)$在开区间 (a,b) 上可导；
- $f(a)=f(b)$

> 则存在$\xi \in (a,b)$ ，使得 $f'(\xi)=0$

1.1.2 Lagrange中值定理

> 设函数$f(x)$满足以下两个条件：

- $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
- $f(x)$在开区间 (a,b) 上可导；

> 则存在$\xi \in (a,b)$ ，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

1.1.3 Cauchy中值定理

> 设函数$f(x),g(x)$满足以下三个条件：

- $f(x),g(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
- $f(x),g(x)$在开区间 (a,b) 上可导；
- $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$

> 则存在$\xi \in (a,b)$ ，使得 $\frac{f'(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

1.1.4 L'Hospital法则

1.1.4.1 零比零型

> 设函数$f(x),g(x)$满足以下三个条件：

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0;$
- $f(x),g(x)$在点a的某个去心邻域内都可导，且$g'(x)\neq 0;$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A, A\in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$

> 则有下述L'Hospital法则成立：
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

1.1.4.2 无穷比无穷型

> 设函数$f(x),g(x)$满足以下三个条件：

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty;$
- $f(x),g(x)$在点a的某个去心邻域内都可导，且$g'(x)\neq 0;$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A, A\in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$

> 则有下述L'Hospital法则成立：

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

1.1.5 Taylor公式

1.1.5.1 Peano余项

若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个开区间 (a,b) 上具有 n 阶导数，那么对于任一 $x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 被称为 Peano余项。

1.1.5.2 Lagrange余项

若函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个开区间 (a,b) 上具有 $(n+1)$ 阶导数，那么对于任一 $x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\epsilon)}}{(n+1)!}(x)^{n+1}$ 被称为 Lagrange余项。

1.1.6 极值点判定定理

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域中有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

(1) 设存在 $\delta > 0$，使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 上可导：

- 若在 $(x_0-\delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \geq 0$，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 上有 $f'(x) \leq 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点。
- 若在 $(x_0-\delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \leq 0$，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 上有 $f'(x) \geq 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点。
- 若 $\exists x_1 \in (x_0-\delta, x_0), x_2 \in (x_0, x_0+\delta)\ \text{s.t.}\ f'(x_1) \cdot f'(x_2) > 0$，则 x_0 不是 $f(x_0)$ 的极值点。

(2) 设 $f'(x_0) = 0$ ，且 $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导：

- 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点。
- 若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点。
- 若 $f''(x_0) = 0$，则 x_0 可能是 $f(x)$ 的极值点，也可能是不是 $f(x)$ 的极值点。

1.2微分中值定理的综合技巧

1.2.1 基础计算题

微分中值定理的基础计算基本上考查 **L'Hospital法则** 和 **Taylor公式** （精确计算也只能考查这两个知识点），这一部分的计算以求各种形式的极限为主，可以与之前所学的求函数极限方法相结合，部分**小量近似也可以直接利用泰勒展开式**理解，在解题时会更加自然。

为了方便使用 L'Hospital 法则，我们会采用将极限式化简为分式的方法。所求极限若本身为分式，即可以在验证 L'Hospital 条件后 **“无脑洛，一直洛”**，而所给式子不是 L'Hospital 形式的不定式时，我们也可以考虑使用适当的变换来完成计算，如下所示。

- $0 \cdot \infty$ 型：可将乘积中的无穷小或无穷大**取倒数**到分母上，化为零比零型或无穷比无穷型。
- $\infty - \infty$ 型：把两个无穷大变形为**两个无穷小的倒数**，再通分使其化为零比零型。
- 1^∞ 型：可利用对数性质 $e^{\ln a} = a$ 将函数化简成以e为底数的指数函数，对指数进行求极限。
- 0^0型：$0^0 = e^{\ln 0^0} = e^{0 \cdot \ln 0} = e^{0 \cdot \infty}$

1.2.2 综合证明题

在数分1中要求的微分中值定理包括五个，分别是：费马定理（也称费马引理），罗尔中值定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理，泰勒中值定理（也称泰勒公式），就我刷往年卷的经验来说，考得最多的是 **Rolle 中值定理** 和 **Lagrange 中值定理**，掌握这两个定理基本上解决数分考试中的大题问题就不太大，大家可以把这些作为复习的重点。

微分中值定理的证明题，往往具有一定的综合性，常常结合闭区间上连续函数的性质以及积分中值定理综合证明，也常常综合不同的微分中值定理进行证明；

- 证明导数或含导数的数学式为零，**常常用罗尔中值定理**，有时也用费马定理；
- 证明含导数的不等式或含多个中值的等式，**常常用拉格朗日中值定理**，有时也用柯西中值定理；
- 如果是证明高阶导数（二阶及二阶以上，尤其是二阶以上）的等式或不等式，则常用**泰勒公式**。

1.3 相关例题

1.（2021期末原题）计算极限：

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_a^x(1+u^4)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}u}{x^3}$$

2.（2021期末原题）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\neq 0,f(0)=1$，求 $f'(0),f''(0)$

3.（2021微积分乙期末）计算极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}-(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}\right]$$

4.（2020微积分H期末）已知：

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+ax+bx^2)^{\frac{1}{x^2}}=2021$$

则 a,b的值分别为？

5.（2021期末原题）已知$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 存在

6.（2022微积分国赛初赛）设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0,f'(x)\leq 0,f''(x)\leq f(x)$，证明 $f'(0)\geq-\sqrt{2}$.

7. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，并且有 $f(0)=0,f(1)=\dfrac{1}{3}$，求证：

$$\exists\varepsilon\in(0,\frac{1}{2}),\xi\in(\frac{1}{2},1),\text{s.t. }f'(\varepsilon)+f'(\xi)=\varepsilon^2+\xi^2$$

8. 设$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，并且有 $f(1)=0$，证明：

$$\exists\xi\in(0,1),\text{s.t. }2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

9. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，并且有 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=1$，证明：

$$\begin{aligned}&(1)\ \exists\,\varphi\in(0,1),\text{s.t. }f'(\varphi)=0;\\&(2)\ \exists\,\xi\in(0,1),\text{s.t.}f''(\xi)<-2;\end{aligned}$$

2. 不定积分

不定积分铁律：积分千万条，+C第一条！

2.1不定积分常用积分表

本积分表参考了21级图灵班陈小川同学的知乎文章，链接如下：

[被风灌醉的蝴蝶 - 知乎 (zhihu.com)]

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right) + C$$

补充：三角函数万能公式以及相关替换

$$\tan\frac{x}{2} = t : \sin x = \frac{2t}{1 + t^2},\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1 + t^2}$$

2.2不定积分常用方法

- 第一类换元积分法

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f_1(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f_1(g(x))\mathrm{d}g(x) = F_1(g(x)) + C$$

- 第二类换元积分法

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))\mathrm{d}g(t) = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F_1(t) + C = F_1(g^{-1}(x)) + C$$

- 分部积分法

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

2.3不定积分习题

不定积分在数学分析中往往只作为一种工具，在考试中考察的形式也相对简单，不会出现在辅学群中时常出现的钓鱼题（比如什么$\int \frac{1}{x^5 + 1}\mathrm{d}x$），因此我就直接上题目了。

1. （2021期末原题）计算不定积分：

$$I = \int \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\mathrm{d}x$$

2.（2021微积分乙期末）求不定积分：

$$I=\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

3.（2021微积分甲期末）求不定积分：

$$I=\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x} \mathrm{d}x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

4.（2020微积分H期末）求不定积分：

$$I_1=\int \frac{x^3-2x+1}{(x-2)^{100}} \mathrm{d}x; \quad I_2=\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos x}$$

5.（2020微积分甲期末）求不定积分：

$$I=\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

6.求不定积分：

$$I=\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

7.（2022微积分省赛）求不定积分：

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$$

8.（对偶式的组合积分法）求不定积分：

$$I=\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \mathrm{d}x$$

9.（对偶式的组合积分法）求不定积分：

$$I=\int xe^x \sin x \mathrm{d}x$$

3.定积分及其应用

3.1相关定理描述

3.1.1定积分的定义

- 黎曼可积、黎曼和
- 达布定理、达布和

3.1.2 Riemann可积的充分必要条件

- **定理1**：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积等价于：对于任意划分 Δ，当 $\|\Delta\|=\max(\Delta x_i)\to 0$ 时，Darboux大和与Darboux小和的极限相等，即有以下极限等式成立

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\overline{S}(\Delta)=L=l=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\underline{S}(\Delta)$$

- **定理2**：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积等价于：对于任意划分 Δ，当 $\|\Delta\|=\max(\Delta x_i)\to 0$ 时，有以下极限等式成立

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0\ \ (\omega_i=M_i-m_i,\Delta x_i=x_i-x_{i-1})$$

  - **推论2.1**：闭区间上的连续函数一定可积。
  - **推论2.2**：闭区间上的单调函数必定可积。
- **定理3**：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积等价于：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在着一种划分，使得相应的振幅满足

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

  - **推论3.1**：闭区间上只有有限个不连续点的有界函数必定可积。

3.1.3 积分中值定理

- **积分第一中值定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，并且 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使以下等式成立：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- **积分第二中值定理**：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$，使以下不等式成立：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

3.1.4 牛顿-莱布尼茨公式

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，并且满足以下条件：

- 在区间 $[a,b]$ 上可积；
- 在区间 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$；

则有以下等式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$$

3.1.5 变限积分求导公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)}f(t)\mathrm{d}t=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$$

3.1.6 定积分的几何应用

- 平面图形的面积（小学二年级就会）
- 旋转体体积的计算
  - 图形绕 x 轴旋转

$$V=\pi\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

  - 图形绕 y 轴旋转（套筒公式）

$$V=2\pi\int_a^b|x\cdot f(x)|\mathrm{d}x$$

- 若平面图形绕 $x=c,y=m,c,m\in\mathbb{R}$ 旋转，可以利用平移法转移到 x 轴或者 y 轴上。

- 计算弧长的弧长公式
  - 参数方程的弧长公式：

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]\Longrightarrow \text{弧长} s=\int_\alpha^\beta\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\mathrm{d}t$$

  - 直角坐标方程的弧长公式

$$y=f(x),(a\le x\le b)\Longrightarrow \text{弧长} s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

  - 极坐标方程的弧长公式

$$\rho=\rho(\theta),\ (\alpha\le\theta\le\beta)\ \Longrightarrow \text{弧长} s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

- 曲率半径的计算：
  - 直角坐标方程：

$$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

  - 参数方程：

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

  - 极坐标方程：

$$K=\frac{\rho^2+2\rho'-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

补充：虽然定积分在物理中的应用是非常重要的，但这个玩意从往年卷和我自己课上的记忆上来看都不是数分1的重点，所以在此不做赘述，感兴趣的同学可以移步至大一下的普物1辅学（doge）

3.2 定积分及其应用的相关解题技巧

- **黎曼积分和达布定理等**：黎曼可积是定积分最基本的定义，而达布和以及对应的达布定理同样是定积分的等价定义形式，是在数学分析1中定积分问题的底层核心，大家对相关的概念要熟悉掌握。这部分内容相当重要，贯穿了后续的定积分内容和数分2的学习，但是在考察形式上总体是相对简单的，可能就是丢一个函数让你验证其可积性（考虑用达布定理的振幅和趋于0来说明），总之这类题重点在于对知识的考查而非思维能力，大家只需要牢记概念和定理使用条件即可。
- **积分中值定理**：个人感觉积分中值定理应该是整个数分1中最难的知识点了，从我后续参加一些数学竞赛和一些数应同学的反馈来看，一元定积分绝大部分难题都与积分中值定理有关，但因为数分卷子体量不大而且重要知识点多，在微分中值定理基本必出的情况下感觉留给积分中值定理的空间不多了（？纯个人猜测），我觉得单从考试角度出发（如果你不是想要99+的分数），就只需要记住积分中值定理的使用条件（第一中值定理和第二中值定理条件的区别，对于 $f(x),g(x)$ 的不同要求），如果真的出现了类似题目（肯定不会太难）尝试套用即可。

- **定积分相关计算&定积分的几何应用**：老师们眼中的送分题，赶紧背公式吧，这种题目也一定要把方法步骤详细阐明，并且没有什么算错的容错，**是一定需要拿下的**。

3.3 定积分及其应用的相关习题

1.利用 Darboux 上下和证明：Dirichlet 函数$D(x)$在 $[0,1]$ 上不 Riemann 可积，Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上Riemann 可积。

2.已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且有以下等式成立：

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明：

$$\begin{aligned}&(1)\exists\phi\in(0,1),\mathrm{s.t.}\ f(\phi)=0\\&(2)\ \ \exists\xi\in(0,1),\mathrm{s.t.}\ \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

3.（2020期末）计算定积分：

$$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

4.（2021期末）设曲线 $C: y=e^x$ 从 $(0,0)$ 引切线 l ，求直线 l，曲线 C 和 y 轴围成的区域绕 x 轴旋转得到的几何体的体积。

5.设区域 D 是由 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形，求 D 绕 直线 $y=3$ 旋转所得到的旋转体体积。

6.设区域 D 是由 $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的封闭图形，求 D 绕 y 轴旋转所得到的旋转体体积。

7\. 求曲线 $s^{\frac{2}{3}}+(2y)^{\frac{2}{3}}=1$ 的全长。

8.求曲线 $y=\int_0^x \tan t\ \mathrm{d}t,(0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 的弧长 s。

9.计算摆线

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

的一拱 $(0\le\theta\le 2\pi)$ 的长度。

10.（2022全国大学生数学竞赛（非数学类）初赛）证明：对于任意的正整数 n，恒有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\,\mathrm{d}x\le(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8})\pi^2$$

4.反常积分

4.1相关定理描述

4.1.1 Cauchy 判别法

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 的可积函数，且满足对任意的 $x\in[a,+\infty)$，$f(x)\geq 0$，若存在正实数 K 满足：

$$(1) f(x)\leq\frac{K}{x^p}, p>1\Longrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\text{收敛}$$
$$(2) f(x)\geq\frac{K}{x^p}, p\leq 1\Longrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\text{发散}$$

4.1.2 Cauchy 判别法的极限形式

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 的可积函数，且满足对任意的 $x\in[a,+\infty)$，$f(x)\geq 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=l$，则有以下判定准则成立：

$$(1) 0\leq l<+\infty, p>1\Longrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\text{收敛}$$
$$(2) 0<l\leq+\infty, p\leq 1\Longrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\text{发散}$$

4.1.3 Abel-Dirichlet判别法

Abel-Dirichlet 判别法用于判定函数乘积的反常积分的敛散性，也是判断反常积分敛散性最重要的两个定理。

对于给定的反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，若满足下面两个条件之一：

$$(Abel\text{条件})\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\text{收敛，}g(x)\text{在}[a,+\infty)\text{上单调有界;}$$
$$(Dirichlet\text{条件})F(x)=\int_a^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\text{在}[a,+\infty)\text{上有界}$$
$$g(x)\text{在}[a,+\infty)\text{上单调且有}\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

4.2 反常积分的相关解题技巧

- **反常积分的敛散性**：通过适当的放缩后将被积函数化成简单的形式，再使用相关判别法（多项式形式可以考虑使用 Cauchy 判别法，含有三角函数可以考虑使用 Dirichlet 判别法），一般的题目只用熟悉判别法就能顺利完成。
- **反常积分的计算**：计算前需要首先证明反常积分收敛，证明收敛后就可以参照定积分的计算方式完成证明，需要特别留意瑕点。

4.2 反常积分的相关习题

在网上没有找到什么特别合适的反常积分相关习题，因此留下的习题比较少，大家可以再把教材的课后习题过一遍。

1.计算反常积分：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|^{\frac{1}{2}}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t$$

（提示，对 $t-x$ 进行换元后再处理）

2. 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0, f(0)=1$，证明： $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$，且两者均收敛。

3. 证明：反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$ 的值与 α 无关。