一、定义

基础定义

- **不定积分**（Indefinite Integration），也可称**反导函数**（Antiderivative）或**原函数**。在微积分中，函数 f 的**不定积分**，是一个可微函数 F 且其导数等于原来的函数 f，即 $F' = f$
- **定义 1.1** 若在某个区间上，函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 成立关系

  $$F'(x) = f(x),$$

  或等价地

  $$d(\ F(x)\ ) = f(x)dx$$

  则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。
- **定义 1.2** 一个函数 $f(x)$ 的原函数全体称为这个函数的**不定积分**，记作 $\int f(x)dx$.

  （注：“$\int$”被称为积分变量，$f(x)$ 被称为被积函数，x 被称为积分变量，积分变量所用字母无关紧要，即对于 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 在需要时也不妨写作 $\int f(t)dt = F(t) + C$）
- **不定积分的线性性质 定理1.1 (线性性)** 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数都存在，则对任意常数 k_1 和 k_2，函数 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 的原函数也存在，且有：

  $$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx.$$

  （注：当 $k_1, k_2 = 0$ 时，等式右端应理解为常数 C ）
- 基本初等函数的微分公式与不定积分公式（教材 P.208）

基本的不定积分公式，例如：

微分	不定积分
$d(e^x)=e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + C$
$d(\ln x)=\frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$
$d(\sin x)=\cos x dx$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$d(\cos x)=-\sin x dx$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$d(\tan x)=\sec^2 x dx$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$d(\sec x)=\tan x\sec x dx$	$\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$
$d(\csc x)=-\cot x\csc x dx$	$\int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$
$d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$d(\arctan x)=\frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

- 总结：求 $\int f(x)dx$ 即找到一个函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$.

换元积分法和分部积分法

第一类换元积分法（凑微分）

- （详细定义详见教材 P.210）

  若 $\int f(u)du = F(u)+C$ 而 $u=u(x)$ 是关于 x 的可微函数，则有：

$$\begin{aligned}\int f(u(x))\,u'(x)dx &= \int f(u(x))d(u(x)) \\ &= F(u(x))+C\end{aligned}$$

- 常用的凑微分：
  - $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$
  - $x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1})\ (\alpha\ \neq -1)$

    特别的 $\alpha=-1$ 时，

    $\frac{1}{x}dx = d(ln|x|)$
- 上述定义比较抽象，但见过下面例子后就明白这其实很简单，并且为什么这个叫凑微分了
  - 例1. $\int xe^{x^2}dx$

    解：

$$
\begin{aligned}
&\because d(x^2) = 2xdx \\
&\therefore xdx = \frac{1}{2}dx^2 \\
&\therefore \int xe^{x^2}dx \\
&= \int e^{x^2}xdx \\
&= \int \frac{e^{x^2}}{2}dx^2 \\
&= \frac{e^{x^2}}{2} + C
\end{aligned}
$$

- 不同的凑微分有时会得出不同的结果，所以如果对答案时（×）答案不一样也不要惊讶

  下面是一个很经典的例子：$\int sec\, x\, dx$

  解法1：

$$
\begin{aligned}
\int sec\, x\, dx &= \int \frac{cosx}{cos^2x}dx \\
&= \int \frac{1}{1-sin^2x}dsinx \\
(\text{令}\, u = sinx\,) &= \int \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u})du \\
&= \frac{1}{2}(-ln|1-u| + ln|1+u|) + C \\
&= ln\sqrt{|\frac{1+u}{1-u}|} + C \\
&= ln\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}} + C
\end{aligned}
$$

  解法2：

$$
\begin{aligned}
\int sec\, x\, dx &= \frac{sec\, x(sec\, x + tan\, x)}{secx + tanx}dx \\
&= \frac{(tan\, x + sec\, x)'}{sec\, x + tan\, x}dx \\
&= \frac{1}{sec\, x + tan\, x}d(sec\, x + tan\, x) \\
&= ln|sec\, x + tan\, x| + C
\end{aligned}
$$

  同学们可以自己尝试一下：

$$
\begin{aligned}
\int sec\, x\, dx &= \int \frac{1}{cosx}dx \\
&= 2\int \frac{1}{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2} \\
&= 2\int \frac{1}{1-tan^2\frac{x}{2}}d(tan\frac{x}{2}) \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

- 第一类换元积分法总结：关键是凑，凑出 $u(x)$，再把原积分变为 $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C.$

第二类换元法

- 设函数 $x=\varphi(t)$ 在某一开区间上可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，如果 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t)+C$，则有：

  $$\int f(x)dx=G(\varphi^{-1}(x))+C$$

  其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

- 例题 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

  解：

  令 $x=atant$，则: $t=arctan\frac{x}{a}$

  $$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx&=\int sect\,dt\\&=ln|tant+sect|+C\\&=ln|\frac{x}{a}+sec(arctan\frac{x}{a})|+C\end{aligned}$$

分部积分法

- 设函数 $u(x),v(x)$ 可导，若 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在，则：

  $$\int u(x)v'(x)=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

  证明：

  $$\begin{aligned}&\because d[u(x)v(x)]=v(x)d[u(x)]+u(x)d[v(x)]\\&\text{两边同时求不定积分并移项：}\\&u(x)v(x)-\int v(x)d[u(x)]=\int u(x)d[v(x)]\\&\text{即：}\\&\int u(x)v'(x)=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx\end{aligned}$$

- 一般步骤：

  1. 把被积函数拆分成 $u(x)v'(x)$，并将 $v'(x)dx$ 改写成 $d[v(x)]$，通常 $v'(x)dx$ 取 $x^n,e^{\pm x},sinx,cosx$ 等（反对幂指三：反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数）
  2. 使用分部积分公式求不定积分（有时一次不够，需多次反复使用）

- 例题1. $\int lnx\,dx$

  解：

  $$\begin{aligned}\int lnx\,dx&=xlnx-\int x\,d(lnx)\\&=xlnx-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=xlnx-1\end{aligned}$$

- 例题2. $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

  解：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}d(x^2+1) \\ &= -\frac{1}{2}\int x\,d(\frac{1}{x^2+1}) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}arctan\,x+C\end{aligned}$$

- 例题3. $\int sec^n xdx$

  解：记 $I_n=\int sec^n xdx$

  $$\begin{aligned}\int sec^n xdx &= \int sec^{n-2}x\,d(tanx) \\ &= tanx\,sec^{n-2}x-\int tan^2x\,(n-2)\,sec^{n-2}x\,dx \\ &= tanx\,sec^{n-2}x-(n-2)\int\frac{1-cos^2x}{cos^2x}sec^{n-2}x\,dx \\ &= tanx\,sec^{n-2}x-(n-2)\int sec^n xdx+(n-2)\int sec^{n-2}x\,dx\end{aligned}$$

  即：$I_n=tanx\,sec^{n-2}x-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$

基本积分表（P.218)

下面的是几个比较需要技巧推的公式，可能会用到，但一般不常见

$$\begin{aligned}&\int sec\,x\,dx=ln|sec\,x+tan\,x|+C \\ &\int csc\,x\,dx=ln|csc\,x+cot\,x|+C \\ &\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C \\ &\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{2}(\,x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2ln\,|x+\sqrt{x^2+a^2}|\,)+C \\ &\ldots\end{aligned}$$

（建议自己看看书，把这里面的积分表全部弄明白怎么出来的，也培养下自己的积分感觉）