2022-2023春夏学期数分辅学 级数板块讲义

刘志炜 2023.4.1

Part I 数项级数

正项级数(性质最好) 技巧基本上是 估阶与积分放缩

收敛的定义?(余项趋于0) 收敛等价于 **部分和有上界**. $Cauchy$判别 与 $d'Alembert$判别(本质是与 **几何级数** 比较).

比较判别法(普通形式与极限形式): 注意特殊情况 **极限为0和$+\infty$** , 前一种情况同收敛，后一种情况同发散.

$Raabe$判别法中的一个$trick: 1+\frac{\alpha}{n} \geq (1+\frac{1}{n})^{\beta}$ 其中($\alpha > \beta$) 从而变成 $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\beta}}$ 的情况.

积分判别法揭示了 **积分与级数的关系(收敛性上)** 要求u_n **单调递减**.

一个有意思的结论: 从任何 **正项级数** 出发都可以构造一个 **收敛更慢** 的正项级数.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数且收敛，$\{r_n\}$为余项和数列，$p<1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$均收敛 ($r_n \to 0$).

$$\text{注意到}a_n = r_n - r_{n+1}\text{的性质，研究对象可以变成性质良好的}r_n(r_n \to 0)$$

$$\frac{a_n}{r_n^p} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n^p} = \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{r_n^p} \leq \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p}(\text{常用的估计技巧, 由端点值变成积分平均})$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{r_n^p} \leq \int_{r_m}^{r_1} \frac{dx}{x^p} \leq \int_{0}^{r_1} \frac{dx}{x^p}\text{部分和存在一致的上界, 故收敛}$$

$Gauss$判别法: 设$\sum u_n$为正项级数，且存在$\lambda \geq 0, \mu \in R$ 成立 $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o(\frac{1}{n}), n \to \infty$ 则:

若$\lambda > 1$或$\lambda = 1$且$\mu > 1$时级数收敛. $\lambda < 1$或$\lambda = 1$且$\mu < 1$时级数发散.　证明如下：

$$\text{本质是和}p\text{级数做比较, 类似的我们应该考虑}\frac{u_n}{u_{n+1}}, \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\text{之间的关系}$$

$$(1+\frac{1}{n})^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}), \text{考虑如何选择}\alpha > 1\text{使得在某项后}\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}, \lambda > 1\text{显然可以做到}$$

$$\text{若}\lambda = 1\text{只需要选择}1 < \alpha < \mu\text{即可, 将两式相减可得}\frac{1}{n}(\mu - \alpha + o(1)), \text{则也可证得.}$$

$$\text{利用连乘法, 从}\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq \frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\text{可得某项后}u_n \leq \frac{1}{n^{\alpha}}\text{即证.}$$

任意项级数 (绝对收敛与条件收敛)

充要条件$Cauchy$收敛原理: $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N$, 有$|\sum_{k=n+1}^{m} a_n| < \epsilon$　令$m \to \infty$就是余项和$\to 0$定义.

$Leibniz$交错级数: 形式如$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, u_n单调递减收敛于0.　如下性质给出了 **交错级数部分和的上界**

在该充分条件的证明中，提到一个重要的性质: $|u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots + (-1)^{p+1} u_{n+p}| \leq u_{n+1}$.

(研究对象改变)$Abel$变换(**离散的分部积分**): 假设$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$则$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = B_n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$.

$Abel$和$Dirichlet$收敛定理: 研究形式如$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$的收敛性，要求$a_n$单调有界且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛或$a_n$单调趋于0且$\sum_{n=1}^{m} b_n$有界.

以上收敛定理提到的一些 **典型级数** : $\sum \frac{sinn}{n^p}, \sum \frac{cosn}{n^p}, \sum \frac{1}{n(lnn)^p}, \sum \frac{(-1)^n}{n^p}$.

更序级数

重排定理: 若 **绝对收敛**，则任意更序级数均收敛到相同的值.

Cauchy乘积: 当$\sum a_n$与$\sum b_n$均绝对收敛时, 它们的$Cauchy$乘积$\sum c_n, c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$也收敛, 且级数和为$(\sum a_n)(\sum b_n)$.

(补充定理) 关于二重无限求和的可交换性: 设$\forall n, u_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}, a_{n,k} \geq 0$收敛且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$.

$$\text{还是从有限的情况考虑, 双重求和在有限情况下可交换：}\sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} a_{n,k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$$

$$\text{同样的可知}\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\quad\text{上下两行均令}m \to \infty\text{即证.}$$

例题1.1：判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2nsin\frac{1}{n}}}$ 的敛散性.

例题1.2：已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$发散

例题1.3：设$x_n \in R$, 若$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n^\delta}, \delta > 0$收敛, 求证$\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n^\delta} \to 0, n \to \infty$.

例题1.4：已知正项数列a_n满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \frac{1}{2}$, 证明任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

例题1.5：设$\phi(x)$是R上连续周期函数, 周期为1且 $\int_0^1 \phi(x)dx = 0, f(x)$在$[0,1]$上可微，且一阶导连续：

$$a_n = \int_0^1 f(x)\phi(nx)dx, n = 1, 2 \ldots,$$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛.

例题1.6：讨论级数的 $\sum_{n=1}^{\infty} ln(1 + \frac{(-1)^p}{n^p})$绝对收敛和条件收敛性.

Part II 函数项级数

$f_n(x), \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 这两种表达形式都是等价的，作趋近极限的时候变量是n，x决定取值.

极限函数的确定的想法是普适的, 在无界函数的估计中很重要.

点态收敛? 一致收敛? 一致收敛对加减法封闭，对乘除法不封闭

极限函数$f(x), \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$，点态收敛给予每个点的定义，一致收敛是性质(**对趋近程度的要求**，直观图像), 当n足够大之后$f_n(x)$的取值被限定在某个小邻域.

一致收敛判别法? (Abel和Dirichlet判别类似形式)

定义: 在点态收敛中 N 的取值可以不依赖于 x 的选择，即$\forall \epsilon > 0, sup\{N_x, x \in D\} < +\infty$.

等价定义: 柯西收敛准则，$\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists N, \forall n, m > N$有:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon 或 |\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)| < \epsilon$$

充要判别法: $\lim\limits_{n\to\infty} sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| = 0$则$x$在$D$上一致收敛.

级数形式的必要条件: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$D$上一致收敛，则$u_n(x)$在$D$上一致收敛与0.

类海涅定理(通常用于判别非一致收敛): $f_n(x)$在D上一致收敛与$f(x)$等价于对任意数列$\{x_n\}, x_n \in D$有: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

充分条件Weierstrass判别: 设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in D$中每一项满足, $|u_n(x)| \leq a_n$且级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则该函数项级数在D上一致收敛. (通常技巧: 在闭区间上找端点来控制, $Taylor$,求导找最大值)

积分、求导、求极限与无限求和的交换

若$u_n(x)$在$[a,b]$上可积、连续, 且其函数项级数一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上可积、连续，且积分、极限运算可与无限求和交换.

若$u_n(x)$在$[a,b]$上有连续导函数，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$[a,b]$一致收敛，则该区间上，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$**一致收敛可导**，且求导与无限求和可交换.

$Dini$定理: $f_n(x)$在$[a,b]$上点态收敛于$f(x)$, 若$f_n(x)$与$f(x)$在$[a,b]$上均连续，且对于$\forall x \in [a,b]$固定，$f_n(x)$关于n单调，则$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

例题2.1：证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$在$(0, +\infty)$内一致收敛.

例题2.2：证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(1+nx)}{nx^n}$在$(1, +\infty)$上连续.

例题2.3：设$b > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 试证：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$在$[0,b]$上一致收敛.

例题2.4：已知$f(x)$为R上的连续函数, 证明函数列$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x + \frac{k}{n})$在$R$上内闭一致收敛.

例题2.5：已知区间$[a,b]$上的连续函数列$\{f_n\}$一致收敛于极限函数f, 且已知f在$[a,b]$上无零点, 证明：函数列$\{\frac{1}{f_n}\}$在$[a,b]$上一致收敛.

例题2.6：设$f(x) \in C[0,1], f(1) = 0$, 求证：$x^n f(x)$在$[0,1]$上一致收敛于0.

Part III 幂级数

收敛半径和幂级数的研究缘由

由泰勒展开进而引入了泰勒级数, 研究以多项式为基底的 特殊函数项级数. (多项式优良性质遗传到幂级数)

(x_0-r,x_0+r)内的幂级数**绝对收敛**, $|x-x_0|>r$时**发散**, 仅有端点的收敛性不确定.

通常用$Cauchy$和$d'Alembert$极限法给出收敛半径(从判别法角度证明). 收敛域的求解重要技巧是 **换元**.

一致收敛性(由Abel两个定理引入)

给定幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$r$, 即确定了收敛域和

$Abel$第二定理: (a)幂级数在$(-r,r)$上内闭一致收敛. (b)若幂级数在$x=r$处收敛, 则它在$\forall a\in(-r,r],[a,r]$上一致收敛.

由在 **开的收敛域** 上良好的一致收敛性，**极限、求导和积分**运算可与无限求和交换，且可以运算后 **收敛半径不变**.

函数的幂级数展开(可用于求级数和)

由$Taylor$公式引入$Taylor$级数，但 **级数的收敛性** 以及 **是否收敛到原函数** 需要考虑 收敛半径和**余项公式**.

常用的初等函数的幂级数展开: (求函数的幂级数展开时: 求导, 积分 , **柯西乘积**, 以及在求$\frac{f}{g}$类型时可以用 **假设法**)

$$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in R$$

$$sinx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in R$$

$$cosx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!},x\in R$$

$$ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,x\in(-1,1)$$

$$arctan\ x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1},x\in[-1,1]$$

常用求幂级数和函数的工具: 几何级数的和函数，从常见初等函数的幂级数凑微分、凑积分，柯西乘积

例题3.1 : $\forall x\in(-1,1)$, 有$\dfrac{1}{x^2+x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 求$a_n$的表达式. (多项式配凑)

例题3.2 : 求函数$f(x)=ln^2(1-x)$的幂级数展开式(积分、求导运算类型).

例题3.3 : 求$\dfrac{xins\alpha}{1-2xcos\alpha+x^2}$, $|x|<1$的幂级数展开式. (假设法)

例题3.4 : 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(sin\frac{1}{3n})(x^2+x+1)^n$的收敛域. (换元)

例题3.5(缺项幂级数) : 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛范围.

例题3.6 : 计算无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和. (运用基本级数和积分求导运算求幂级数)

例题3.7 : 计算积分 $\int_0^1\dfrac{lnx}{1-x^2}dx$. (逐项积分的应用)

例题3.8 : (方程式法求和函数)试求下列幂级数的和函数$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!!}$.

Part IV 傅里叶级数

定义的由来? 性质? 什么叫傅里叶级数? 计算公式?

给出一个级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_ncos\ nx+b_nsin\ nx$，如何判断其是否为傅里叶级数? (**一致收敛**)

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)cos\frac{n\pi}{T}xdx\ n=1,2\dots$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)sin\frac{n\pi}{T}xdx\ n=1,2\dots$$

求傅里叶级数的时候几个组合积分的技巧要熟练: $\int e^{ax}sinxdx, \int x^n sinxdx, \int lnxsinxdx \dots$

两大收敛定理:(收敛性的推导中, 由Riemann引理推到局部性原理，再从Lipschitz条件推到可导)

$1. Dirichlet - Jordan$判别: 若$f(x)$在x的某个邻域$O(x,\delta)$上是 **分段单调有界** 函数，则该点的$Fouier$级数收敛于$\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

$2. Dirhchlet - Lipschitz$推论: 若$f(x)$在点x处两个 **单侧导数** 存在，则该点的$Fouier$级数收敛于$\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Parseval恒等式(可用于构造级数并求和):

假设$f(x)$以2π为周期，且在$[-\pi,\pi]$上绝对可积且平方可积，则f的$Fourier$系数满足:

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

积分与级数的交换性质 (积分条件极弱且结论直接收敛):

逐项积分: 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上绝对可积且平方可积，则$f(x)$的$Fouier$级数可以逐项积分，即$\forall c,x\in[-\pi,\pi]$:

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n cos\ nt+b_n sin\ nt)dt$$

逐项微分: 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续且仅有限个点不可导, $f'(x)$在$[-\pi,\pi]$上绝对可积且平方可积，则(若$f''(x)$可积，**则取等**):

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n sin\ nx+b_n cos\ nx)$$

(补充)一致收敛性:

设$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$上可导，$f'(x)$可积，则$f(x)$的$Fourier$级数在R上一致收敛于$f(x)$.

例题4.1：已知$f(x)=\begin{cases}sin\ \pi x\ 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0\ \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$, 记$b_n=2\int_0^1 f(x)sin\pi x, S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n sin\ n\pi x$, 求$S(0), S(\frac{1}{2})$

例题4.2：设函数列$\{\phi_n(x)\}$定义在$[a,b]$上, 且满足如下单位正交性, f在$[a,b]$可积, $a_n=\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$, 求证：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\le\int_a^b f^2(x)dx$

$$\int_a^b\phi_m(x)\phi_n(x)=\begin{cases}0,\ m\ne n\\ 1,\ m=n\end{cases}$$

例题4.3：已知$f(x)=cos\ \alpha x$, 求$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的$Fourier$展开式, 并证明：$\frac{1}{sinx}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$

例题4.4：以2π为周期的函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上的表达式$\frac{1}{4}x(2\pi-x)$, 求其傅里叶展开并证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.