2022-2023春夏学期数分辅学 级数板块讲义

刘志炜 2023.4.1

Part I 数项级数

正项级数(性质最好) 技巧基本上是 估阶与积分放缩

收敛的定义?(余项趋于0) 收敛等价于 **部分和有上界**. $Cauchy$判别 与 $d'Alembert$判别(本质是与 **几何级数** 比较).

比较判别法(普通形式与极限形式): 注意特殊情况 **极限为0和$+\infty$**，前一种情况同收敛，后一种情况同发散.

$Raabe$判别法中的一个$trick: 1+\frac{\alpha}{n}\geq(1+\frac{1}{n})^{\beta}$ 其中($\alpha>\beta$) 从而变成 $\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\beta}}$ 的情况.

积分判别法揭示了 **积分与级数的关系(收敛性上)** 要求u_n **单调递减**.

一个有意思的结论: 从任何 **正项级数** 出发都可以构造一个 **收敛更慢** 的正项级数.

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数且收敛，$\{r_n\}$为余项和数列，$p<1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}$均收敛 ($r_n\to 0$).

$$\text{注意到}a_n=r_n-r_{n+1}\text{的性质，研究对象可以变成性质良好的}r_n(r_n\to 0)$$
$$\frac{a_n}{r_n^p}=\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n^p}=\int_{r_{n+1}}^{r_n}\frac{dx}{r_n^p}\leq\int_{r_{n+1}}^{r_n}\frac{dx}{x^p}(\text{常用的估计技巧, 由端点值变成积分平均})$$
$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{r_n^p}\leq\int_{r_m}^{r_1}\frac{dx}{x^p}\leq\int_0^{r_1}\frac{dx}{x^p}\text{部分和存在一致的上界, 故收敛}$$

$Gauss$判别法: 设$\sum u_n$为正项级数，且存在$\lambda\geq 0,\mu\in R$成立 $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+o(\frac{1}{n}),n\to\infty$ 则:

若$\lambda>1$或$\lambda=1$且$\mu>1$时级数收敛. $\lambda<1$或$\lambda=1$且$\mu<1$时级数发散. 证明如下：

$$\text{本质是和}p\text{级数做比较, 类似的我们应该考虑}\frac{u_n}{u_{n+1}},\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\text{之间的关系}$$
$$(1+\frac{1}{n})^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{n}+o(\frac{1}{n}),\text{考虑如何选择}\alpha>1\text{使得在某项后}\frac{u_n}{u_{n+1}}\geq\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}},\lambda>1\text{显然可以做到}$$
$$\text{若}\lambda=1\text{只需要选择}1<\alpha<\mu\text{即可, 将两式相减可得}\frac{1}{n}(\mu-\alpha+o(1)),\text{则也可证得.}$$
$$\text{利用连乘法, 从}\frac{u_n}{u_{n+1}}\geq\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\text{可得某项后}u_n\leq\frac{1}{n^{\alpha}}\text{即证.}$$

任意项级数 (绝对收敛与条件收敛)

充要条件$Cauchy$收敛原理: $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,$有$|\sum_{k=n+1}^{m}a_n|<\epsilon$ 令$m\to\infty$就是余项和$\to 0$定义.

$Leibniz$交错级数: 形式如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, u_n$单调递减收敛于0. 如下性质给出了 **交错级数部分和的上界**

在该充分条件的证明中，提到一个重要的性质: $|u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots+(-1)^{p+1}u_{n+p}|\leq u_{n+1}$.

(研究对象改变)$Abel$变换(**离散的分部积分**): 假设$B_n=\sum_{k=1}^{n}b_n$则$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=B_na_n-\sum_{k=1}^{n-1}B_k(a_{k+1}-a_k)$.

$Abel$和$Dirichlet$收敛定理: 研究形式如$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$的收敛性，要求$a_n$单调有界且$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛或$a_n$单调趋于0且$\sum_{n=1}^{m}b_n$有界.

以上收敛定理提到的一些 **典型级数**：$\sum\frac{sinn}{n^p},\sum\frac{cosn}{n^p},\sum\frac{1}{n(lnn)^p},\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$.

更序级数

重排定理: 若 **绝对收敛**，则任意更序级数均收敛到相同的值.

Cauchy乘积: 当$\sum a_n$与$\sum b_n$均绝对收敛时, 它们的$Cauchy$乘积$\sum c_n,c_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_{n-k}$也收敛, 且级数和为$(\sum a_n)(\sum b_n)$.

(补充定理) 关于二重无限求和的可交换性: 设$\forall n,u_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k},a_{n,k}\geq 0$收敛且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}$.

$$\text{还是从有限的情况考虑, 双重求和在有限情况下可交换：}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}a_{n,k}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}$$
$$\text{同样的可知}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}a_{n,k}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}\quad\text{上下两行均令}m\to\infty\text{即证.}$$

例题1.1：判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2nsin\frac{1}{n}}}$的敛散性.

对级数项进行估阶,指数趋近于2,考虑极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^{2nsin\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(2-2nsin\frac{1}{n})lnn}=(Taylor展开)1$,比较判别法即证

例题1.2：已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散,求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$发散

$$考虑逆否命题,已知\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}收敛,则\frac{a_n}{1+a_n}\to 0,由极限保号性,有限项后\frac{a_n}{1+a_n}\le\frac{1}{2}.$$

$$则可以推出a_n\le 1,则\frac{a_n}{1+a_n}\ge\frac{a_n}{2},由比较判别法\sum a_n收敛,即证.$$

例题1.3：设$x_n\in R$,若$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n^\delta},\delta>0$收敛,求证$\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n^\delta}\to 0,n\to\infty.$

$$考虑设\sum\frac{x_k}{k^\delta}的部分和数列为S_n,假设S_n\to\alpha,n\to\infty,使研究对象转换成S_n,变成单个数列的极限更好研究$$

$$\frac{1}{n^\delta}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{n^\delta}\sum_{k=1}^{n}k^\delta\frac{x_k}{k^\delta}=(Abel求和)\frac{1}{n^\delta}(n^\delta S_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k((k+1)^\delta-k^\delta)),为了往有性质的\frac{x_k}{k^\delta}产生联系,但是是加权求和.$$

$$考虑\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k((k+1)^\delta-k^\delta)}{n^\delta}=(Stolz)\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}[n^\delta-(n-1)^\delta]}{n^\delta-(n-1)^\delta}=\alpha即证.$$

例题1.4：已知正项数列a_n满足 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\frac{1}{2}$,证明任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

$$由极限定义可知,有限项后n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\ge\frac{1}{4}即\frac{a_n}{a_{n+1}}\ge 1+\frac{1}{4n},可知a_n单减.$$

$$又有对于\forall\alpha>0,\exists 0<\beta<\alpha使1+\frac{\alpha}{n}\ge(1+\frac{1}{n})^\beta.$$

$$可知\frac{a_n}{a_{n+1}}\ge(\frac{n+1}{n})^\beta即a_n n^\beta\ge a_{n+1}(n+1)^\beta,n足够大.$$

$$可知a_n n^\beta\le M有界,则a_n\le\frac{M}{n^\beta},故a_n\to 0,由Lebniz判别即证.$$

例题1.5：设$\phi(x)$是R上连续周期函数,周期为1且 $\int_0^1\phi(x)dx=0$, $f(x)$在$[0,1]$上可微，且一阶导连续：

$$a_n=\int_0^1 f(x)\phi(nx)dx,n=1,2\ldots,$$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

对于周期函数的积分,我们通常利用换元,从而得到对每个周期的积分的一个更细致的刻画.

$$a_n=(t=nx)\frac{1}{n}\int_0^n f(\frac{t}{n})\phi(t)dt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(\frac{t}{n})\phi(t)dt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(\frac{k+t}{n})\phi(t)dt$$

$$考虑如何利用条件?可以猜测到a_n大约和\frac{1}{n}同阶,如何刻画后面和式积分的有界性?考虑：$$

$$\forall a\in R,\int_0^1 a\phi(x)dx=a\int_0^1\phi(x)dx=0$$

$$|\int_0^1 f(\frac{k+t}{n})\phi(t)dt|=|\int_0^1[f(\frac{k+t}{n})-f(\frac{k}{n})]\phi(t)|dt\le\int_0^1\frac{t}{n}|f'(\xi_t)||\phi(t)|dt\le\frac{M_f M_\phi}{2n}(设|f'(x)|\le M_f,|\phi(x)|\le M_\phi)$$

$$则\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(\frac{k+t}{n})\phi(t)dt\le\frac{1}{n}n\frac{M_f M_\phi}{2n}=\frac{M}{n},由比较判别法可知a_n^2收敛.$$

例题1.6：讨论级数的 $\sum_{n=1}^{\infty}ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$绝对收敛和条件收敛性.$(p>0)$

$$绝对收敛性：|ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})|\sim\frac{1}{n^p}可知p>1时绝对收敛.$$

条件收敛依然考虑估阶,用$Taylor$展开把它用p级数估计.

$$ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}+\sum_{n=1}^{\infty}O(\frac{1}{n^{2p}}),同时由1+\frac{(-1)^n}{n^p}\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}],可知后面的|O(\frac{1}{n^{2p}})|\le\frac{M}{n^{2p}}.$$

上面那个推论具体可以用$x^2[ln(1+x)-x]$在$[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$连续有最大值证.当$\frac{1}{2}<p\le 1$时原级数收敛.(第一项条件收敛,第二项绝对收敛)

$$当0<p\le\frac{1}{2}时,可以继续展开到k阶,而\frac{1}{n^{2p}}项始终发散,可以证明此时级数发散.$$

Part II 函数项级数

$f_n(x), \sum_{k=1}^n u_k(x)$ 这两种表达形式都是等价的，作趋近极限的时候变量是n，x决定取值.

极限函数的确定的想法是普适的, 在无界函数的估计中很重要.

点态收敛? 一致收敛? 一致收敛对加减法封闭，对乘除法不封闭

极限函数$f(x), \sum_{k=1}^\infty u_k(x)$，点态收敛给予每个点的定义，一致收敛是性质(**对趋近程度的要求**，直观图像), 当n足够大之后$f_n(x)$的取值被限定在某个小邻域.

一致收敛判别法? (Abel和Dirichlet判别类似形式)

定义: 在点态收敛中 N 的取值可以不依赖于 x 的选择，即$\forall \epsilon > 0, sup\{N_x, x \in D\} < +\infty$.

等价定义: 柯西收敛准则，$\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists N, \forall n, m > N$有:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \text{或} |\sum_{k=n+1}^m u_k(x)| < \epsilon$$

充要判别法: $\lim_{n\to\infty} sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| = 0$则$x$在$D$上一致收敛.

级数形式的必要条件: $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在D上一致收敛，则$u_n(x)$在D上一致收敛与0.

类海涅定理(通常用于判别非一致收敛): $f_n(x)$在D上一致收敛与$f(x)$等价于对任意数列$\{x_n\}, x_n \in D$有: $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

充分条件Weierstrass判别: 设函数项级数$\sum_{n=1}^\infty u_n(x), x \in D$中每一项满足, $|u_n(x)| \le a_n$且级数$\sum_{n=1}^\infty a_n$收敛，则该函数项级数在D上一致收敛. (通常技巧: 在闭区间上找端点来控制, $Taylor$,求导找最大值)

积分、求导、求极限与无限求和的交换

若$u_n(x)$在$[a,b]$上可积、连续, 且其函数项级数一致收敛，则$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$在$[a,b]$上可积、连续，且积分、极限运算可与无限求和交换.

若$u_n(x)$在$[a,b]$上有连续导函数，且$\sum_{n=1}^\infty u_n'(x)$在$[a,b]$一致收敛，则该区间上，$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$**一致收敛可导**，且求导与无限求和可交换.

$Dini$定理: $f_n(x)$在$[a,b]$上点态收敛于$f(x)$, 若$f_n(x)$与$f(x)$在$[a,b]$上均连续，且对于$\forall x \in [a,b]$固定，$f_n(x)$关于n单调，则$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

例题2.1：证明 $\sum_{n=1}^\infty x^2 e^{-nx}$在$(0,+\infty)$内一致收敛.

$$\text{考虑}\frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{x^2}{\sum_{k=1}^\infty \frac{(nx)^k}{k!}} \le \frac{x^2}{1+nx+\frac{n^2x^2}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{n}{x}+\frac{n^2}{2}} \le \frac{2}{n^2}, \text{由}Weierstrass\text{判别可知收敛.}$$

例题2.2：证明级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{ln(1+nx)}{nx^n}$在$(1,+\infty)$上连续.

$$\text{证明该函数项级数一致收敛即可. 考虑}f(x) = \frac{ln(1+nx)}{nx^n}, x \in (1,+\infty).$$

$$f'(x) = \frac{1-nln(1+nx)}{nx^{n+1}}, \text{令}f'(x) = 0\text{可以得到最小值点}ln(1+nx_0) = \frac{1}{n}.$$

$$\text{则}\frac{ln(1+nx)}{nx^n} \le f(x_0) = \frac{1}{n^2x_0^n} \le \frac{1}{n^2}, \text{由}Weierstrass\text{判别即证.}$$

例题2.3：设$b > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$收敛, 试证：$\sum_{n=1}^\infty a_n \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$在$[0,b]$上一致收敛.

$$\text{引入}\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x} = (n-1)!, \text{考虑利用}Dirichlet\text{判别.}$$

$$\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt \le \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = 1, \text{同时}\forall x \in [0,b], \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x t^{n+1}e^{-t}dt = \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{t}{n+1}t^n e^{-t}dt\text{可知}$$

$$\text{当}n+1 \ge b\text{时, 该函数随}n\text{单调递减, 故利用}Dirichlet\text{判别即证.}$$

例题2.4：已知$f(x)$为R上的连续函数, 证明函数列$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n})$在$R$上内闭一致收敛.

$$由黎曼和定义可知, n\to\infty, f_n(x)\to\int_0^1 f(x+t)dt$$

$$考虑\forall[a,b]\subset R, |f_n(x)-f(x)|=|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}[f(x+t)-f(x+\frac{k}{n})]dt|, 此时考虑f(x)在[a,b]一致连续.$$

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta,\forall x_1,x_2\in[a-1,b+1],|x_1-x_2|<\delta,有|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

$$故当n足够大, 上式\le\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\epsilon dt=\epsilon, 由定义即证.$$

例题2.5：已知区间$[a,b]$上的连续函数列$\{f_n\}$一致收敛于极限函数f, 且已知f在$[a,b]$上无零点, 证明：函数列$\{\frac{1}{f_n}\}$在$[a,b]$上一致收敛.

$$不妨设f在[a,b]恒正, f在[a,b]连续, 且有最小值m_1>0.$$

$$由定义的保号性, 同样可以得到, 对于足够大n, f_n(x)\ge m_2, x\in[a,b]$$

$$再利用一致收敛定义, |\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}|=|\frac{f-f_n}{f_nf}|\le\frac{\epsilon}{m_1m_2},\forall x\in[a,b]$$

例题2.6：设$f(x)\in C[0,1], f(1)=0$, 求证：$x^nf(x)$在$[0,1]$上一致收敛于0.

$$由连续|f(x)|\le M, x\in[a,b], 再考虑连续定义\exists\delta>0,\forall x\in(1-\delta,1],|f(x)|\le\epsilon.$$

$$令n足够大可使, |x^nf(x)|\le M\epsilon, x\in[0,1-\delta], |x^nf(x)|\le\epsilon, x\in(1-\delta,1]即证.$$

Part III 幂级数

收敛半径和幂级数的研究缘由

由泰勒展开进而引入了泰勒级数, 研究以多项式为基底的 特殊函数项级数. (多项式优良性质遗传到幂级数)

(x_0-r,x_0+r)内的幂级数**绝对收敛**, $|x-x_0|>r$时**发散**, 仅有端点的收敛性不确定.

通常用$Cauchy$和$d'Alembert$极限法给出收敛半径(从判别法角度证明). 收敛域的求解重要技巧是 **换元**.

一致收敛性(由Abel两个定理引入)

给定幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$r$, 即确定了收敛域和

$Abel$第二定理: (a)幂级数在$(-r,r)$上内闭一致收敛. (b)若幂级数在$x=r$处收敛, 则它在$\forall a\in(-r,r]$, $[a,r]$上一致收敛.

由在 **开的收敛域** 上良好的一致收敛性，**极限、求导和积分**运算可与无限求和交换，且可以运算后 **收敛半径不变**.

函数的幂级数展开(可用于求级数和)

由$Taylor$公式引入$Taylor$级数，但 **级数的收敛性** 以及 **是否收敛到原函数** 需要考虑 收敛半径和**余项公式**.

常用的初等函数的幂级数展开: (求函数的幂级数展开时: 求导, 积分 , **柯西乘积**, 以及在求$\frac{f}{g}$类型时可以用 **假设法**)

$$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in R$$

$$sinx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in R$$

$$cosx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}, x\in R$$

$$ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, x\in(-1,1)$$

$$arctan\ x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}, x\in[-1,1]$$

常用求幂级数和函数的工具: 几何级数的和函数，从常见初等函数的幂级数凑微分、凑积分，柯西乘积

例题3.1：$\forall x\in(-1,1)$, 有$\dfrac{1}{x^2+x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 求$a_n$的表达式. (多项式配凑)

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1-x}{(1-x)(x^2+x+1)}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-x^{3n+1}$$

例题3.2：求函数$f(x)=ln^2(1-x)$的幂级数展开式(积分、求导运算类型).

$$f'(x)=2\frac{ln(1-x)}{1-x}=2(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n})(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)=(\text{柯西乘积})2\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n,x\in[0,1)$$

$$\text{再由逐项积分}ln^2(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n,x\in[0,1).$$

例题3.3：求$\dfrac{sinx\alpha}{1-2xcos\alpha+x^2},|x|<1$的幂级数展开式.(假设法)

$$\text{设上式}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\text{则}sin\alpha\ x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x^n-2cos\alpha x^{n+1}+x^{n+2})$$

$$\text{故}a_0=0,a_1=sin\alpha,a_n-2cos\alpha a_{n-1}+a_{n-2}=0,\text{由数学归纳法可证}a_n=sin\ n\alpha$$

例题3.4：求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(sin\frac{1}{3n})(x^2+x+1)^n$的收敛域.(换元)

$$\text{令}t=x^2+x+1,\text{由}\sqrt[n]{sin\frac{1}{3n}}\to1,\text{且}sin\frac{1}{3n}\sim\frac{1}{3n},\text{可知}t\in[-1,1)\text{时收敛}$$

$$\text{解}-1\le x^2+x+1<1\text{即可}.$$

例题3.5(缺项幂级数)：求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$的收敛范围.

$$\text{令}a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^m},n=m^2\\0,n\ne m^2\end{cases},\sqrt[n]{a_n}\text{上极限}(n\to\infty)\text{即为}1.\text{即收敛半径为}1.$$

例题3.6：计算无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$的和.(运用基本级数和积分求导运算求幂级数)

例题3.7：计算积分$\int_0^1\dfrac{lnx}{1-x^2}dx$.(逐项积分的应用)

$$\forall[a,b]\subset[0,1],\text{有}\int_a^b\frac{lnx}{1-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b x^{2n}lnxdx$$

$$\text{再令}a\to0,b\to1,\int_0^1\frac{lnx}{1-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1x^{2n}lnxdx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(2n+1)^2}=-\frac{\pi^2}{8}$$

例题3.8：(方程式法求和函数)试求下列幂级数的和函数$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!!}$.

$$\text{解该微分方程}S''(x)+1=S(x)\text{即可}.(\text{由于该通解无解析表达},\text{无需求出})$$

Part IV 傅里叶级数

定义的由来? 性质? 什么叫傅里叶级数? 计算公式?

给出一个级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_ncos\ nx+b_nsin\ nx$，如何判断其是否为傅里叶级数? (**一致收敛**)

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)cos\frac{n\pi}{T}xdx\ n=1,2\dots$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)sin\frac{n\pi}{T}xdx\ n=1,2\dots$$

求傅里叶级数的时候几个组合积分的技巧要熟练: $\int e^{ax}sinxdx,\int x^nsinxdx,\int lnxsinxdx\dots$

两大收敛定理:(收敛性的推导中, 由Riemann引理推到局部性原理，再从Lipschitz条件推到可导)

1.$Dirichlet-Jordan$判别: 若$f(x)$在x的某个邻域$O(x,\delta)$上是 **分段单调有界** 函数，则该点的$Fouier$级数收敛于$\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

2.$Dirhchlet-Lipschitz$推论: 若$f(x)$在点x处两个 **单侧导数** 存在，则该点的$Fouier$级数收敛于$\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Parseval恒等式(可用于构造级数并求和):

假设$f(x)$以2π为周期，且在$[-\pi,\pi]$上绝对可积且平方可积，则f的$Fourier$系数满足:

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

积分与级数的交换性质 (积分条件极弱且结论直接收敛):

逐项积分: 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上绝对可积且平方可积，则$f(x)$的$Fouier$级数可以逐项积分，即$\forall c,x\in[-\pi,\pi]$:

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n cos\ nt+b_n sin\ nt)dt$$

逐项微分: 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续且仅有限个点不可导, $f'(x)$在$[-\pi,\pi]$上绝对可积且平方可积，则(若$f''(x)$可积，**则取等**):

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n sin\ nx+b_n cos\ nx)$$

(补充)一致收敛性:

设$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$上可导，$f'(x)$可积，则$f(x)$的$Fourier$级数在R上一致收敛于$f(x)$.

$例题4.1：已知f(x)=\begin{cases}sin\ \pi x\ 0\le x<\frac{1}{2}\\0\ \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases},记b_n=2\int_0^1 f(x)sin\pi x,S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n sin\ n\pi x,求S(0),S(\frac{1}{2})$

$先将f(x)奇延拓为g(x),可得到b_n即为g(x)的傅里叶系数,由分段可导收敛定理,可知S(0)=g(0)=0,S(\frac{1}{2})=\frac{g(\frac{1}{2}+)+g(\frac{1}{2}-)}{2}=\frac{1}{2}$

$例题4.2：设函数列\{\phi_n(x)\}定义在[a,b]上,且满足如下单位正交性,f在[a,b]可积,a_n=\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx,求证：\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\le\int_a^b f^2(x)dx$

$$\int_a^b\phi_m(x)\phi_n(x)=\begin{cases}0,\ m\ne n\\1,\ m=n\end{cases}$$

$$\forall n,考虑积分\int_a^b[f(x)-\sum_{k=1}^{n}a_k\phi_k(x)]^2dx\ge 0,展开左式有：$$

$$\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{n}a_k\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx+\int_a^b\sum_{k=1}^{n}a_k^2\phi_k^2(x)dx+\int_a^b\sum_{i,j}a_ia_j\phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\ge 0,令n趋于无穷即可.$$

$例题4.3：已知f(x)=cos\ \alpha x,求f(x)在[-\pi,\pi]上的Fourier展开式,并证明：\frac{1}{sinx}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$

$例题4.4：以2\pi为周期的函数f(x)在[0,2\pi]上的表达式\frac{1}{4}x(2\pi-x),求其傅里叶展开并证明\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$