微积分 第一次辅学

一、数列极限和函数极限

数列极限的定义

给定一个数列 $\{a_n\}$ ，如果存在实数 L ，对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，都 $\exists N$ ，使得当 $n > N$ 时， $|a_n - L| < \varepsilon$ 成立，那么我们说数列 $\{a_n\}$ 的极限是 L ，并写作：

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

（例题） 证明 $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2} = 2$ 。

解析：

（例题） 证明 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ 。

解析：

数列极限的四则运算

假设 $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ 且 $\lim_{n \to \infty} b_n = B$ ，则以下运算成立：

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = A - B$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{A}{B}$$

单调有界定理

如果一个实数数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的并且有上界，或者是单调递减的并且有下界，那么这个数列收敛。

（例题） 证明 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ 收敛。

解析：

Cauchy 收敛原理

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任何 $\varepsilon>0$ ，存在一个正整数 N ，使得对 $\forall m,n>N$ ， $|a_m-a_n|<\varepsilon$ 成立。我们也称收敛的数列为**柯西列（或基本列）**。

> 我们如何选择证明极限存在的方法呢?
>
> 定义法是明确需要知道（或者猜到）极限是多少的。
>
> 如果要证明一个不知道极限是什么的数列收敛，优先考虑 Cauchy 收敛原理。

（例题）若存在 $C>0$ 使得 $|x_1|+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_n-x_{n-1}|<C$ ，则称 $\{x_n\}$ 有界变差。证明：有界变差数列收敛。

解析

（真题）设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调有界， $\{x_n\}$ 为实数列，则下列陈述中错误的是：

A.若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{f(x_n)\}$ 必发散

B.若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 必收敛

C.若 $\{f(x_n)\}$ 发散，则 $\{x_n\}$ 必发散

D.若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 必收敛。

解析

（真题）下列陈述不正确的是：

A.若数列 $\{a_n\}$ 收敛， $\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_n+b_n\}$ 必发散；

B.若数列 $\{a_n\}$ 收敛， $\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_nb_n\}$ 必发散；

C.若正项数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散，则 $\{a_nb_n\}$ 必发散；

D.若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$ ，则数列 $\{a_n\}$ 必收敛。

解析

二、极限的计算

基本极限

设 $a>0,b>1$ ，基本极限关系为 $\log n<n^a<b^n<n!<n^n$ 。

- 根式： $(1)a>0,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;\quad(2)\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;\quad(3)\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty;$
- 比式： $(1)\forall k>0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^k}=0\ (k>0);\quad(2)\forall k>0,a>1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ (k>0);$

- 对数： $(1)\forall k>0, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0;\quad (2)\forall k>0, \lim\limits_{x\to 0^+}x^k\ln x=0;$
- 指数： $(1)\forall k>0, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0;$

两个重要极限

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e;$
  - 变式： $\forall k, \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n=e^k,\quad \text{e.g.}\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e}.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to 0}e^{\frac{\ln(1+x+x^2)}{x}}=e^{\frac{2x+1}{1+x+x^2}}=e$.

（真题） 下列关于极限的说法正确的是：

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=e^2$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{2x}=e^2$

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x}=e^2$

解析

夹逼准则

a_n,b_n,c_n 为三个序列，若 $\exists N$ 使得 $n\geq N$ 时 $a_n\leq b_n\leq c_n$ ，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$ 。

（例题） 求： $(1)\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ ， (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ 。

解析

海涅定理（归结原理）

（因为要讲计算，就把这一部分放到前面了）

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0(n=1,2,3,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$ ，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 成立： $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 。

这样，我们就可以把一些数列极限转化成（连续）函数的极限了。

平均值相关

有限项幂次根号平均

> $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$ 。

证明：设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ ， $\sqrt[n]{A^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{mA^n}$ 。

推论： (1) 若正数列 a_n 收敛到 $a>0$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ 。

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 非负有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=\sup\limits_{n\ge1} a_n$ 。

平均值定理

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ （有限 or $+\infty$ or $-\infty$ ），则：

- 算数平均值： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ ；
- 几何平均值：若 $a_n>0$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$ 。

推论： (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=a$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$ ；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$ 。

复杂的指数和底数（重要极限）

（例题） 求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{2+\sqrt[n]{64}}{3})^{2n-2}$ 。

解析：

（例题） 求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$ 。

解析：

等价无穷小（重点）

等价、高阶和低阶无穷小

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$ 。

当 $A=1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的等价无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)$ ；

当 $A=0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的高价无穷小，记作 $f(x)=o(g(x))$ ；

当 $A=\infty$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的低价无穷小。

同阶无穷小

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ，在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中恒有 $0\le|\frac{f(x)}{g(x)}|\le M<\infty$ ，且 $f(x)$ 不为 $g(x)$ 的高阶无穷小，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的同阶无穷小，记作 $f(x)=O(g(x))$ 。注意，这里并不要求 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在。

若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶或高阶无穷小，则记 $f(x)=O(g(x))$ 。

以上定义中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 理论上可以是任意函数，但在使用时， $g(x)$ 一般都取 x 的整数次幂。

常用等价无穷小

在 $x=0$ 处:

$$\ln(1+x)\sim x \quad e^x-1\sim x$$

$$\sin x\sim x \quad \cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2 \quad \tan x\sim x$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$$

$$\arcsin x\sim x \quad \arctan x\sim x$$

$$a^x-1\sim x\ln a\ (a>0)$$

等价无穷小在求极限中的应用

等价无穷小常在极限题目中出现乘积或比式时使用。

例如我们要求 $f(x)g(x),\dfrac{f(x)}{h(x)}$ 的极限，我们已知 $f(x)\sim x$ ，那么我们就能直接用 x 替换 $f(x)$ 。

但如果题目中出现和差时，使用等价无穷小就需要格外小心。我们后面会学到，**等价无穷小的本质是泰勒展开后仅保留最低次项，而忽略了更高次项。**因此在使用等价无穷小替换时，如果替换后的和差是 0 ，则意味着最低次项被消掉，但更高次项并不一定会消掉。一个简单的例子是求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ，如果简单地用 x 替换 $\sin x$ ，则二者抵消，答案为 0 。但事实上 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+O(x^5)$ ，因此答案为 $\dfrac{1}{6}$ 。**简单来说，在题目中有和差式时，使用等价无穷小需要保证在和差运算时最低次项不被消掉。**

题型一：直接应用

(真题) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+12x^2}-\cos x}{x^2}$ 。

解析：

题型二、利用定义求系数

(真题) 当 $x\to1$ 时， $\alpha(x)=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 与 $\beta(x)=A(x-1)^2$ 为等价无穷小量，求 A 和 n 的值。

解析：

题型三、等价无穷小的判断

（真题） 设 $\alpha(x)=\dfrac{8-x}{4+x},\beta(x)=2-\sqrt[3]{x}$ ，当 $x\to 8$ 时，下列陈述正确的是：

A. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶非等价无穷小量；

B. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量；

C. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量；

D. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更低阶的无穷小量。

解析：

题型四、未知函数的等价替换

（真题） 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2}+\cos 2x)}{\ln(1+x^2)}$ 。

解析：

含根式差的极限问题的常用策略：有理化

遇到趋向于无穷的两个根式作差的极限问题时，我们常采用有理化的方法将它转化为两个同阶无穷大量的比值。

例如：$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\frac{a+b}{2}$$

（真题） 求 $\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+2x}-\sqrt[3]{x^3-x})$ 。

解析：

（真题） 若 $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+6x+8}-(ax+b))=1$ ，求 a,b 的值。

解析：

含三角函数的极限问题的常用策略

添项后利用倍角公式

（例题） 求 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}$ 。

解析：

周期性加减 $n\pi$ 或 $2n\pi$ / 有理化

（例题） 求 $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 。

解析：

含阶乘极限问题的常用策略：大胆猜测和放缩

Stirling 公式

当 $n\to\infty$ 时，$n!\simeq\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ ，进一步地，$\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$ 。

我们由此可以估计出 $n!$ 的增长速度。

（例题） 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ 。

解析：

（例题） 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ 。

解析：

数列递推：不动点猜解

这种题的一般形式是：$x_{n+1}=f(x_n)$ ，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 。

（例题） $x_{n+1}=\dfrac{10}{x_n-3}$ ，当 $x_1=2$ 、 $x_1=4$ 时分别求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。

解析：

三、函数的连续性

连续的定义

若 $f(x)$ 在 x_0 的开邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点。

若 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 【 $(x_0-\delta,x_0]$ 】中有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 【 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 】，则称 x_0 为 $f(x)$ 的右【左】连续点。

海涅定理

见上文。

四则运算

若 f,g 在 x_0 处连续，则 $f+g,f-g,f\times g,\dfrac{f}{g}$ 都在 x_0 处连续（对于除法要求 $g(x_0)\neq 0$ ）

复合运算

若 f 在 x_0 处连续， g 在 $f(x_0)$ 处连续，则 $g(f(x))$ 在 x_0 处连续。

初等函数的连续性

幂函数：当 $a>0$ 时， $f(x)=x^a$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续；当 $a<0$ 时， $f(x)=x^a$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均连续。

指数函数：当 $a>0$ 时， $f(x)=x^a$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

对数函数：当 $a>0$ 时， $f(x)=\log_a x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

三角函数： $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续， $\tan x$ 在它的每个最小正周期上都连续。

反三角函数： $\arcsin x, \arccos x$ 在 $(-1,1)$ 上连续， $\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

> 根据初等函数的连续性和四则运算、复合运算的性质，可以推导出绝大多数函数的连续性和连续区间。

> 例如：若 f, g 连续，则 $|f|=\sqrt{f^2}$ 连续，
> $\max\{f, g\}=\frac{1}{2}(|f+g|+|f-g|), \min\{f, g\}=\frac{1}{2}(|f+g|-|f-g|)$ 连续。

间断点

函数值在某个点处 **没有定义** 或 **有定义但不连续**。分为四种情况。

- **一类间断点**

  可去间断点：间断点处左右极限相等

  跳跃间断点：间断点处左右极限不相等

- **二类间断点**

  无穷间断点：间断点处左右极限至少有一个是 ∞

  震荡间断点：间断点处左右极限至少有一个不存在

间断点的判断

先找到不在函数定义域上的孤立点（例如：分母为 0 ，对数的真数为 0 ，正切函数内为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍等）、函数两种表达式交界处的点（例如绝对值函数），然后依次求出这些点处的函数极限。

（真题） 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+1)(x+2)\ln|x-1|}$ 的可去间断点共有______个。

解析：

四、习题（后续更多）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n}(2i)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ 。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x+7^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}\right)^{1+\frac{i}{n^2}}$$

已知数列满足 $x_1>0, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。