微积分 第一次辅学

一、数列极限和函数极限

数列极限的定义

给定一个数列 $\{a_n\}$ ，如果存在实数 L ，对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，都 $\exists N$ ，使得当 $n > N$ 时， $|a_n - L| < \varepsilon$ 成立，那么我们说数列 $\{a_n\}$ 的极限是 L ，并写作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

（例题） 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{n^2+2} = 2$ 。

解析：放缩成尽可能简单的形式。

$\left|\frac{2n^2-n+1}{n^2+2} - 2\right| = \left|-\frac{n+1}{n^2+2}\right| < \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2}{n}$ 。对任意 $\epsilon > 0$ ，取 $N = \left\lceil \frac{1}{2\epsilon} \right\rceil$ ，则对任意 $n > N$ 均有 $\frac{2}{n} < \epsilon$ 。因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{n^2+2} = 2$ 。

（例题） 证明 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ 。

解析：和差化积。

$|\sin x - 1| = |\sin x - \sin\frac{\pi}{2}| = |2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}| = |2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}| = 2\sin^2\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}$ 。

当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时，（根据重要极限） $\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2} \to 0$ 。所以 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ 。

数列极限的四则运算

假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ，则以下运算成立：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$

单调有界定理

如果一个实数数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的并且有上界，或者是单调递减的并且有下界，那么这个数列收敛。

（例题） $x_n > 0, x_{n+1} + \dfrac{4}{x_n} < 4$ ，证明 x_n 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

解析： 均值不等式 $x_n + \dfrac{4}{x_n} \geq 2\sqrt{x_n \cdot \dfrac{4}{x_n}} = 4 > x_{n+1} + \dfrac{4}{x_n}$ ，因此 $x_n > x_{n+1}$ ，数列单调递减，又因为 $0 < x_{n+1} < x_{n+1} + \dfrac{4}{x_n} < 4$ 。所以 x_n 有界，所以 $\{x_n\}$ 收敛。设极限为 A ，则有 $4 \leq A + \dfrac{4}{A} \leq 4$ ，所以 $A = 2$ 。

（例题） （1） $a_1 = \sqrt{C}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + C}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ；

（2）证明 $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ 收敛。

解析：

（1） 利用数学归纳法可以证明 a_n 单调递增。令 $a = \sqrt{a + C}$ ，那么 $a = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4C}}{2} > a_1$ ，

若 $a_n < a$ ，那么 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + C} < \sqrt{a + C} = a$ ，所以可以得知 $\forall n \geq 1, a_n < a$ 。根据单调收敛定理，极限存在。

两边求极限可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1 + \sqrt{a + 4C}}{2}$ 。

（2）显然 a_n 单调递增。注意到 $n < 2^{2^n}$ ，所以

$$a_n < \sqrt{2^{2^1} + \sqrt{2^{2^2} + \sqrt{2^{2^3} + \cdots + \sqrt{2^{2^n}}}}} = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}} < 2 \times \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$ 有界。故 $\{a_n\}$ 收敛。

Cauchy 收敛原理

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任何 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 N ，使得对 $\forall m, n > N$ ， $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 成立。我们也称收敛的数列为**柯西列（或基本列）**。

> 我们如何选择证明极限存在的方法呢?
>
> 定义法是明确需要知道（或者猜到）极限是多少的。
>
> 如果要证明一个不知道极限是什么的数列收敛，优先考虑 Cauchy 收敛原理。

（例题）若存在 $C>0$ 使得 $|x_1|+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_n-x_{n-1}|<C$ ，则称 $\{x_n\}$ 有界变差。证明：有界变差数列收敛。

解析：设 $S_n=\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|$ ，则 $\{S_n\}$ 是单调有界数列，故收敛。因此存在 N 使得任意 $n>m>N$ 均有 $|S_n-S_m|<\epsilon$ 。

所以 $|x_n-x_m|\leq\sum_{i=m+1}^{n}|x_i-x_{i-1}|=S_n-S_m<\epsilon$ 。根据柯西收敛原理， $\{x_n\}$ 收敛。

（真题）设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调有界， $\{x_n\}$ 为实数列，则下列陈述中错误的是：

A.若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{f(x_n)\}$ 必发散

B.若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 必收敛

C.若 $\{f(x_n)\}$ 发散，则 $\{x_n\}$ 必发散

D.若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 必收敛。

解析

A. 错，取 $f(x)=f(x)=\begin{cases}1-e^{-x},x\geq 0\\ e^{x}-1,x<0\end{cases}$，取 $x_n=n\to\infty$ 发散，但 $f(x_n)\to 1$ 。

B. 对，根据单调有界定理可得。

C. 错，取 $f(x)=\begin{cases}2-e^{-x},x\geq 0\\ e^{x}-2,x<0\end{cases}$，$x_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{n 为偶数}\\ -\frac{1}{n} & \text{n 为奇数}\end{cases}$， x_n 收敛，但 $f(x_n)$ 振荡。

D. 错，反例同 (1)。

（真题）下列陈述不正确的是：

A.若数列 $\{a_n\}$ 收敛， $\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_n+b_n\}$ 必发散；

B.若数列 $\{a_n\}$ 收敛， $\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_nb_n\}$ 必发散；

C.若正项数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散，则 $\{a_nb_n\}$ 必发散；

D.若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{x\to+\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$ ，则数列 $\{a_n\}$ 必收敛。

解析

A. 对， $\{b_n\}$ 发散 $\Rightarrow \quad \exists\epsilon_0>0,\forall N,\exists n,m>N,|b_n-b_m|>\epsilon_0$

$\{a_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \quad \forall\epsilon>0,\exists N_\epsilon,\forall n,m>N,|a_n-a_m|<\epsilon$

$\therefore \forall N,\exists n,m>\max\{N,N_{\frac{\epsilon_0}{2}}\},|(a_n+b_n)-(a_m+b_m)|>||b_n-b_m|-|a_n-a_m||>\frac{\epsilon_0}{2}$， $\{a_n+b_n\}$ 收敛。

B. 错， $a_n=n,b_n=\frac{1}{n}$ 。

C. 错，$a_n=\begin{cases}1 & \text{n为奇数}\\ \frac{1}{n} & \text{n为偶数}\end{cases}$，$b_n=\begin{cases}1 & \text{n为奇数}\\ n & \text{n为偶数}\end{cases}$。

D. 错，取 $a_n=\sum_k^n\frac{1}{k}$ ， $\lim_{n\to+\infty}|a_{n+1}-a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ ，但 $\{a_n\}$ 发散。

二、极限的计算

基本极限

设 $a>0,b>1$ ，基本极限关系为 $\log n<n^a<b^n<n!<n^n$ 。

- 根式： $(1)a>0,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;\quad(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;\quad(3)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty;$
- 比式： $(1)\forall k>0,\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}=0\ (k>0);\quad(2)\forall k>0,a>1,\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (k>0);$
- 对数： $(1)\forall k>0,\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0;\quad(2)\forall k>0,\lim_{x\to0^+}x^k\ln x=0;$
- 指数： $(1)\forall k>0,\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0;$

两个重要极限

- $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e;$
  - 变式： $\forall k,\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k,\quad \text{e.g. }\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$
  - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{1+x}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{1+x}}\right]^{\frac{x+1}{x}}=e$.

（真题）下列关于极限的说法正确的是：

A. $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

B. $\lim_{x\to+\infty}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=e^2$

C. $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^{2x}=e^2$

D. $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=e^2$

解析

A. $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^0=1$

B. $\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=1$ （同A）

C. $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{2x}=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-x\cdot(-2)}=e^{-2}$

D. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}\cdot 2}=e^2$

夹逼准则

a_n,b_n,c_n 为三个序列，若 $\exists N$ 使得 $n\geq N$ 时 $a_n\leq b_n\leq c_n$ ，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=A$ ，则 $\lim_{n\to\infty}b_n=A$ 。

（例题）求：(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ ， (2) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ 。

解析

(1) $1=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}>\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}>\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ ，后者趋向于 1 ，因此原极限也趋向于 1 。

(2) 取对数得 $\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$ 。因为 $0=\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}\ln(1+1+\cdots+1)=\frac{\ln n}{n}$ ，后者趋向于 0 ，因此取对数后的极限为 0 ，原极限为 1 。

海涅定理（归结原理）

（因为要讲计算，就把这一部分放到前面了）

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是：对于任意满足条件 $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$ ，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 成立： $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$ 。

这样，我们就可以把一些数列极限转化成（连续）函数的极限了。

平均值相关

有限项幂次根号平均

> $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是 m 个正数，则 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, \cdots, a_m\}$ 。

证明：设 $A = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ ， $\sqrt[n]{A^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{mA^n}$ 。

推论： (1) 若正数列 a_n 收敛到 $a > 0$ ， $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ 。

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 非负有界，则 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = \sup_{n \geq 1} a_n$ 。

平均值定理

已知 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ （有限 or $+\infty$ or $-\infty$ ），则：

- 算数平均值： $\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ ；
- 几何平均值：若 $a_n > 0$ ， $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ 。

推论： (1) 若 $\lim_{n \to \infty} (a_n - a_{n-1}) = a$ ，则 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = a$ ；

(2) 若 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = a$ ，则 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ 。

复杂的指数和底数（重要极限）

对于这一类题目，我们一般用两种方法解：一是直接套用 e 的定义式（一般在底数有明显的 $1 + 0$ 形式时使用），二是直接取对数转化为零比零型极限后用等价无穷小。

（例题）求 $\lim_{n \to \infty} (\frac{2 + \sqrt[n]{64}}{3})^{2n-2}$ 。

解析：等价无穷小 $a^x-1\sim x\ln a$ 。

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\frac{2+\sqrt[n]{64}}{3})^{2n-2}\\=&\lim_{n\to\infty}(1+\frac{64^{\frac{1}{n}}-1}{3})^{2n-2}\\=&\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\ln 64}{3n})^{2n-2}\\=&e^{4\ln 2}=16\end{aligned}$$

（例题）求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$ 。

解析：

这是 1^∞ 型极限，因此先取对数。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln(\tan x)=\lim_{t\to1}\frac{2t}{1-t^2}\ln t=\lim_{t\to1}\frac{2t}{1+t}\cdot\frac{\ln t}{1-t}=1\times(-1)=-1.$$

故答案为 $\dfrac{1}{e}$ 。

等价无穷小（重点）

等价、高阶和低阶无穷小

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ 。

当 $A=1$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的等价无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)$ ；

当 $A=0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的高价无穷小，记作 $f(x)=o(g(x))$ ；

当 $A=\infty$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的低价无穷小。

同阶无穷小

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ ，在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中恒有 $0\le|\dfrac{f(x)}{g(x)}|\le M<\infty$ ，且 $f(x)$ 不为 $g(x)$ 的高阶无穷小，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的同阶无穷小，记作 $f(x)=O(g(x))$ 。注意，这里并不要求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在。

若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶或高阶无穷小，则记 $f(x)=O(g(x))$ 。

以上定义中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 理论上可以是任意函数，但在使用时， $g(x)$ 一般都取 x 的整数次幂。

常用等价无穷小

在 $x=0$ 处:

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x$$

$$\sin x \sim x \quad \cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \tan x \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\arcsin x \sim x \quad \arctan x \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$$

等价无穷小在求极限中的应用

等价无穷小常在极限题目中出现乘积或比式时使用。

例如我们要求 $f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{h(x)}$ 的极限，我们已知 $f(x) \sim x$ ，那么我们就能直接用 x 替换 $f(x)$ 。

但如果题目中出现和差时，使用等价无穷小就需要格外小心。我们后面会学到，**等价无穷小的本质是泰勒展开后仅保留最低次项，而忽略了更高次项。**因此在使用等价无穷小替换时，如果替换后的和差是 0 ，则意味着最低次项被消掉，但更高次项并不一定会消掉。一个简单的例子是求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ，如果简单地用 x 替换 $\sin x$ ，则二者抵消，答案为 0 。但事实上 $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ ，因此答案为 $\dfrac{1}{6}$ 。**简单来说，在题目中有和差式时，使用等价无穷小需要保证在和差运算时最低次项不被消掉。**

题型一：直接应用

（真题）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+12x^2}-\cos x}{x^2}$ 。

解析：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+12x^2}-\cos x}{x^2} \\
=&\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[4]{1+12x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2} \\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cdot 12x^2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} \\
=&\frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

题型二、利用定义求系数

（真题） 当 $x \to 1$ 时， $\alpha(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$ 与 $\beta(x) = A(x-1)^n$ 为等价无穷小量，求 A 和 n 的值。

解析： $A = -\frac{\pi}{2}, n = 1$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{A(x-1)^n}\\
=&\lim_{y\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(y+1)}{Ay^n}\\
=&\lim_{y\to0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}y}{Ay^n}\\
=&\lim_{y\to0}\frac{-\frac{\pi}{2}}{Ay^{n-1}}=1
\end{aligned}
$$

题型三、等价无穷小的判断

（真题） 设 $\alpha(x) = \frac{8-x}{4+x}, \beta(x) = 2-\sqrt[3]{x}$ ，当 $x \to 8$ 时，下列陈述正确的是：

A. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶非等价无穷小量；

B. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量；

C. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量；

D. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更低阶的无穷小量。

解析：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to8}\frac{\frac{8-x}{4+x}}{2-\sqrt[3]{x}}\\
=&\lim_{y\to0}\frac{y}{(12-y)(2-\sqrt[3]{8-y})}\\
=&\frac{1}{12}\lim_{y\to0}\frac{y}{2(1-\sqrt[3]{1-\frac{y}{8}})}\\
=&\frac{1}{24}\lim_{y\to0}\frac{y}{\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{8}}=1
\end{aligned}
$$

因此是等价无穷小。

题型四、未知函数的等价替换

（真题） 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$ ，求 $\lim_{x\to0}\frac{f(e^{x^2}+\cos 2x)}{\ln(1+x^2)}$ 。

解析：因为，而当 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ ，而当 $x = 2$ 时 $x - 2 = 0$ ，**所以** $f(x)$ **在** $x = 2$ **处是** $2(x-2)$ **的等价无穷小。**又因为 $x = 0$ 时 $e^{x^2} + \cos 2x = 2$ ，所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{f(e^{x^2} + \cos 2x)}{\ln(1+x^2)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2(e^{x^2} + \cos 2x - 2)}{\ln(1+x^2)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2((e^{x^2} - 1) - (1 - \cos 2x)}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2(x^2 - \frac{1}{2}(2x)^2) + o(x^2)}{x^2} = -2
\end{aligned}$$

含根式差的极限问题的常用策略：有理化

遇到趋向于无穷的两个根式作差的极限问题时，我们常采用有理化的方法将它转化为两个同阶无穷大量的比值。

例如： $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x$

解：

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \frac{a+b}{2}$$

（真题）求 $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt[3]{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x})$ 。

解析：利用公式 $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \infty} x(\sqrt[3]{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x}) \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x[(x^3 + 2x) - (x^3 - x)]}{(x^3 + 2x)^{\frac{2}{3}} + [(x^3 + 2x)(x^3 - x)]^{\frac{1}{3}} + (x^3 - x)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = 1
\end{aligned}$$

（真题）若 $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{9x^2 + 6x + 8} - (ax + b)) = 1$ ，求 a, b 的值。

解析：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+6x+8}-(ax+b))\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{(9x^2+6x+8)^2-(ax+b)^2}{\sqrt{9x^2+6x+8}+(ax+b)}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{(9-a^2)x^2+(6-2ab)x+(8-b^2)}{\sqrt{9x^2+6x+8}+(ax+b)}=1
\end{aligned}$$

观察分子分母的阶数， $9-a^2=0,a=\pm3$ 。

(1) $a=3$ ，原式 $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+6x+8}-(ax+b))$ 发散。

(2) $a=-3$ ， $\lim_{x\to-\infty}\frac{(6+6b)x+(8-b^2)}{\sqrt{9x^2+6x+8}-3x+b}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(6+6b)x+(8-b^2)}{-3x-3x+b}=1\Rightarrow 6+6b=-6,b=-2$.

含三角函数的极限问题的常用策略

添项后利用倍角公式

（例题）求 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}$ 。

解析：

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

周期性加减 $n\pi$ 或 $2n\pi$ / 有理化

（例题）求 $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 。

解析：

当 n 为奇数时， $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi-\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{-\pi}{n+\sqrt{n^2+1}})=0$

当 n 为偶数时， $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin(\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}})=0$

奇偶项极限相等，故原极限为 0 。

含阶乘极限问题的常用策略：大胆猜测和放缩

Stirling 公式

当 $n \to \infty$ 时，$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ ，进一步地，$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ 。

我们由此可以估计出 $n!$ 的增长速度。

（例题） 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ 。

解析： $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 0.$

（例题） 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ 。

解析： $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}} = 0$

（当然，也可以用前面的平均值定理）

数列递推：不动点猜解

这种题的一般形式是：$x_{n+1} = f(x_n)$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

因为在有极限的时候极限点一定满足 $x = f(x)$ 即极限点是 f 的不动点，所以我们可以提前知道答案来为后面的证明提供一个方向（如果是小题甚至可以直接算前几项看出答案）。一般在证明时需要结合单调有界定理，证明 x_n 以不动点为上界或下界。

（例题） $x_{n+1} = \frac{10}{x_n - 3}$ ，当 $x_1 = 2$ 时求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

解析:

$\because x_n<0\Rightarrow x_{n+1}<0,\ \therefore \forall n\geq 2,x_n\leq 0$

$x_{n+2}=\dfrac{10}{\frac{10}{x_n-3}-3}=\dfrac{10(x_n-3)}{19-3x_n}$

$x_{n+2}-x_n=\dfrac{10x_n-30}{19-3x_n}-x_n=\dfrac{10x_n-30-19x_n+3x_n^2}{19-3x_n}=\dfrac{3(x_n+2)(x_n-5)}{19-3x_n}$

当 $x_n>-2$ 时， $x_{n+2}<x_n$ ，并且 $x_{n+2}+2=\dfrac{10x_n-30+38-6x_n}{19-3x_n}=\dfrac{4(x_n+2)}{19-3x_n}>0$ ，所以 $x_{n+2}>-2$ ；

当 $x_n<-2$ 时， $x_{n+2}>x_n$ 并且 $x_{n+2}+2=\dfrac{4(x_n+2)}{19-3x_n}<0$ ，所以 $x_{n+2}<-2$ ；

因为 $x_2=-10,x_3=-\dfrac{10}{13}$ ，所以 $\{x_{2n}\}(n\geq 1),\{x_{2n+1}\}$ 分别单调有界，均收敛

根据 $x=\dfrac{10x-30}{19-3x}\Rightarrow x=-2,5(舍)$ ，得知奇偶子列极限相同，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$

三、函数的连续性

连续的定义

若 $f(x)$ 在 x_0 的开邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点。

若 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 【 $(x_0-\delta,x_0]$ 】中有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 【 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 】，则称 x_0 为 $f(x)$ 的右【左】连续点。

海涅定理

见上文。

四则运算

若 f,g 在 x_0 处连续，则 $f+g,f-g,f\times g,\dfrac{f}{g}$ 都在 x_0 处连续（对于除法要求 $g(x_0)\neq 0$ ）

复合运算

若 f 在 x_0 处连续， g 在 $f(x_0)$ 处连续，则 $g(f(x))$ 在 x_0 处连续。

初等函数的连续性

幂函数：当 $a > 0$ 时， $f(x) = x^a$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续；当 $a < 0$ 时， $f(x) = x^a$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均连续。

指数函数：当 $a > 0$ 时， $f(x) = x^a$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

对数函数：当 $a > 0$ 时， $f(x) = \log_a x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

三角函数： $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续， $\tan x$ 在它的每个最小正周期上都连续。

反三角函数： $\arcsin x, \arccos x$ 在 $(-1, 1)$ 上连续， $\arctan x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

> 根据初等函数的连续性和四则运算、复合运算的性质，可以推导出绝大多数函数的连续性和连续区间。

> 例如：若 f, g 连续，则 $|f| = \sqrt{f^2}$ 连续，
> $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|), \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(|f+g| - |f-g|)$ 连续。

间断点

函数值在某个点处 **没有定义** 或 **有定义但不连续**。分为四种情况。

- **一类间断点**

  可去间断点：间断点处左右极限相等

  跳跃间断点：间断点处左右极限不相等

- **二类间断点**

  无穷间断点：间断点处左右极限至少有一个是 ∞

  震荡间断点：间断点处左右极限至少有一个不存在

间断点的判断

先找到不在函数定义域上的孤立点（例如：分母为 0 ，对数的真数为 0 ，正切函数内为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍等）、函数两种表达式交界处的点（例如绝对值函数），然后依次求出这些点处的函数极限。

（真题） 函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x+1)(x+2)\ln|x-1|}$ 的可去间断点共有______个。

解析：

考虑 $x=-1,-2,1,0,2$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{-3}{(x+1)\ln 2}=\infty$$
$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{(x+1)\ln|x-1|}=\frac{4}{\ln 3}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-3}{2\cdot 3\cdot \ln|x-1|}=0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{1\cdot 2\cdot \ln|x-1|}=\infty$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{3\cdot 4\cdot \ln|x-1|}=\frac{1}{3}$$

答案为 3

四、习题

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ ，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_n+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$
3. $0<a_n<2,(2-a_n)a_{n+1}\geq 1$ ，证明 a_n 收敛，并求其极限。
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\prod_{i=1}^n(2i-1)}{\prod_{i=1}^n(2i)}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{3^x+5^x+7^x}{3})^{\frac{1}{x}}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{i}{n^2})^{1+\frac{i}{n^2}}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sin\dfrac{\pi}{n}-\sin\dfrac{\pi}{n+1})$
10. 已知数列满足 $x_1>0,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

参考答案：

1. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 因此 a_n 有界，所以 $\exists M, \text{s.t.}\ |a_n| < M$ ，所以

$$|a_k b_{n-k+1} - ab| < |a_k| \cdot |b_{n-k+1} - b| + |b| \cdot |a_k - a| \le M|b_{n-k+1} - b| + |b| \cdot |a_k - a|$$

因此得到：
$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} - ab\right| \\ \le&\frac{|a_1 b_n - ab| + \cdots + |b_1 - b|}{n} \\ \le& M \cdot \frac{|b_n - b| + \cdots + |b_1 - b|}{n} + |b| \cdot \frac{|a_1 - a| + \cdots |a_n - a|}{n}\end{aligned}$$

根据平均值定理， $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_1 - a| + \cdots |a_n - a|}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|b_1 - b| + \cdots |b_n - b|}{n} = 0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$

2. $a_n = \dfrac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n^n}$ ，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n-1)(n-1)^{n-1}}{n^n} = (4 - \frac{2}{n})((1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{4}{e}$$

3. 根据不等式 $a_n(2 - a_n) \le \left[\dfrac{a_n + (2 - a_n)}{2}\right]^2 = 1 \le a_{n+1}(2 - a_n)$ ，因此 $a_n < a_{n+1}$ ，根据单调有界定理可知，数列收敛，两侧取极限得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

4. 法一：拆项后错位分组

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n}(2i)} &= \frac{1 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cdots \times \sqrt{2n-1} \times \sqrt{2n-1}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} \\ &= \frac{1 \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{4} \times \cdots \frac{\sqrt{2n-3} \times \sqrt{2n-1}}{2n-2} \times \frac{\sqrt{2n-1} \times \sqrt{2n+1}}{2n} \times \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n}} = 0$

法二（可以了解一下Wallis公式）：

Wallis公式：当 $n \to \infty$ 时， $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi}$ ，更具体地， $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$

证明：根据 $\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x, 0 \le x \le \pi$ ，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k+1} x \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k} x \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k-1} x \mathrm{d}x$$

得到 $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$

构造 $a_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1}, b_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n}$ ，则 $a_n < \dfrac{\pi}{2} < b_n$

又 $b_n-a_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n(2n+1)}=a_n\cdot\frac{1}{2n}<\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}\to 0, n\to\infty$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi}{2}$

所以答案为 0 。

备注： $\sin^n x$ 的积分公式

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & \textbf{n 是偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \textbf{n 是奇数}\end{cases}$$

$$I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\sin^2 x\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

计算方法： $$\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\qquad (I_0=\frac{\pi}{2},I_1=1)$$

5. 利用等价无穷小。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x+7^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\ln 3+1+x\ln 5+1+x\ln 7}{3}+O(x^2)\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x\ln 105}{3}+O(x^2)\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$=e^{\frac{\ln 105}{3}}=\sqrt[3]{105}$$

6. 有理化+等价无穷小

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{2}(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}-n}$$
$$=\sqrt[n]{2}\cdot\frac{n^3(1-\cos\frac{1}{n^2})(\sqrt{n^2+1}+n)}{(n^2+1)-n^2}$$
$$=1\cdot n^3(\sqrt{n^2+1}+n)(\frac{1}{2n^4}+O(\frac{1}{n^6}))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2n}=1$$

7. 放缩

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n^2}\ln(\frac{1}{n})}=e^0=1,\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{2\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n})}=e^0=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n^2})(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n^2})^{1+\frac{i}{n^2}}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n^2})(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n^2}}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n^2})(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n^2})(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n^2})^{1+\frac{i}{n^2}}=\frac{1}{2}$

8. 和差化积

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1}) \\
=&\lim_{n\to\infty} n^2\cdot 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n+1}\right)\right)\sin(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n+1}\right)) \\
=&\lim_{n\to\infty} n^2\cdot 2\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n(n+1)}\right) \\
=&\lim_{n\to\infty} n^2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2n(n+1)} \\
=&\pi
\end{aligned}
$$

9. 不动点猜解+单调收敛定理证明。注意要去掉第一项。

（不动点猜解： $x=1+\frac{x}{x+1}$ 得到 $x^2-x-2=0$ ，不动点为 $-1,2$ ）

因为 $x_n>0$ 时 $x_{n+1}>0$ ， $x_1>0$ ，所以 $x_n>0,\forall n$ 。

对任意 $x_1>0$ ，均有 $x_2=1+\frac{x_1}{x_1+1}<1+1=2$ 。

因为 $x_n<2$ 时 $x_{n+1}-2=\frac{x_n}{x_n+1}-1=-\frac{1}{x_n+1}<0$ 。所以 $x_n<2,\forall n\geq 2$ 。

因为 $x_n<2$ 时 $x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{x_n+1}-x_n=\frac{(x_n+1)(2-x_n)}{x_n+1}>0$ ，所以 $x_{n+1}>x_n$ 。

所以 $\{x_n\}_{n\geq 2}$ 单调增有上界，故收敛。设极限为 x 则 $x=1+\frac{x}{x+1}$ ，解得 $x=-1,2$ 。舍去负解得 $x=2$ 。