微积分期中辅学讲义

极限

$\varepsilon-\delta$语言/$\varepsilon-N$语言

顾名思义，找到ε和δ/N的关系。

例题：

用$\varepsilon-N$语言证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{n^2+2}=2$

用$\varepsilon-\delta$语言证明极限$lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x-\cos x=1$

数列极限

定义法、唯一性、有界性、保号性、四则运算法则

夹逼定理

定义法很好，但是需要猜出极限值。有没有什么除了定义法之外的方法来判断收敛性呢？

1. 确界原理$\to$单调有界准则
2. 柯西准则

这里有一个定理很重要。数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_n\}$的任意子列都收敛并且收敛于相同的极限。

数理递推式

对于递推式，一般而言先通过单调有界准则等来**判断出是否收敛**，然后**将递推式两侧同时求极限**分析极限值。

如果没法判断单调性，也可以**先假设收敛**，求解极限值后再**通过递推式返回证明数列收敛。**

例题：

$a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n(a_n^2+3)}{3a_n^2+1}, n=\mathbb{N}^+$请问数列$\{a_n\}$是否收敛，如果收敛，求出$\lim_{n\to\infty} a_n$

$a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n+3}{a_n+1}, n=\mathbb{N}^+$求$\lim_{n\to\infty} a_n$

函数极限

等价无穷小替换

$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1-x^2)}{x\sin^2 x}$

泰勒展开

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$

洛必达法则

能力排行：e^x很强 $\ln x$很弱小

1. $\frac{0}{0}$型

   $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

2. $\infty-\infty$型

变成$\frac{0}{0}$型

$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

3. 0^0型

$\lim_{x\to 0^+} x^{2\sin x}$

4. 1^∞型

$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

5. ∞^0型

$\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}$

化成指数形式!

经典例题:

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

连续性

间断点类型

第一类间断点：左右极限**都存在**。如果左右极限**相等**但是不等于该点的函数值或者该点函数值不存在，那么就是**可去间断点**；如果左右极限**存在但不相等**，那么就是**跳跃间断点**。

第二类间断点：左右极限**至少有一个不存在**，或者说是间断点且不是第一类间断点。

连续性判断

根据定义判断，通过计算左右极限来判断属于什么间断点。通常先找到“可能的间断点”再去验证其是否为间断点。
例题：
设函数$f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}-1$，求函数$\frac{1}{f(x)}$的间断点，并判断它们的类型。

有界闭区间上连续函数的性质

有界性，最大、最小值定理、零点存在定理（衍生：不动点）、介值定理

导数

定义

设函数$y=f(x)$在 x_0的 某个邻域内有定义，如果极限$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称$f$在$x_0$**可导**，$x_0$为$f$的**可导点**。**极限值**为$f$在$x_0$处的**导数**，记为$f'(x)$；当此极限不存在时，则称$f(x)$在 x_0**不可导**。

存在性

可导和连续的关系：**可导必连续，连续不一定可导。**

定理：设函数f在x_0的某个领域内有定义，则f在x_0处可导**当且仅当**分别左、右可导，且左、右导数值相等。

导数也是极限，所以沿用分析极限是否存在的方法，我们分析导数是否存在，往往去分析f在x_0处左、右导数**是否存在并且是否相等**。

例题：

已知$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}$在$\mathbb{R}$上可导，求常数a,b的值。

计算

基本初等函数求导公式（见书，请务必熟记）

四则运算：**前提是各个函数在x_0处均可导!**

线性性质

$\frac{d}{dx}(\alpha f+\beta g)\,|x=x_0=\alpha\frac{df}{dx}|x=x_0+\beta\frac{dg}{dx}|_{x=x_0}$

相乘

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

相除

$(\frac{f}{g})'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

反函数求导

$y=f(x_0)$ 在 $U(x_0)$内严格单调，在 x_0可导且 $f'(x_0)\neq 0$，$y_0=f(x_0)$

则反函数$g(y)$在y_0处可导，$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

复合函数求导

链式法则：设函数g在x_0处可导，f在对应点$u_0=g(x_0)$处可导，则复合函数

$f(g(x_0))=f'(u_0)g'(x_0)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot g'(x).$

隐函数求导

函数两边同时对x求导。

分清楚怎么样算是“对x求导”，对于某一个参量而言，比如a，那么$a'x$的确是等于0。但是y与x相关，并不是相互独立的量，所以说**对x求导时，y并不是变成0，而是变成y'。**

例题：

设$y=f(x)$是由方程$e^{(x+y)}-2xy=e$所确定的隐函数

(1) 求$f'(0)$ (2) 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{(y-1)\sin(ex^2)}{\sqrt{1+2x^3}-1}$

对数求导法

为什么要取对数？

1. **幂指函数**：幂指函数一般将其转换为以e为底数，$g(x)$为幂的指数函数。那么在这种情况下，因为左边是$f(x)$，右边是e的指数函数，可以对两边都取对数化简计算。
   例题：
   求$f(x)=(\ln x)^{\sin x\cos s}(x>1)$的导数

2. **连乘连除形式**：取对数之后可以将原来的分式变为简单式的加减。
   例题：
   求函数 $y=\frac{(x+1)^2(x+3)^{\frac{2}{3}}}{(x^{x+2})\sqrt{x-1}}(x>1)$的导数

参数方程求导

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

如果$\varphi(t)$和$\psi(t)$都有连续的导函数，并且对于任何$t \in [\alpha, \beta]$ 不同时为零，则我们称此平面曲线为光滑曲线。

注意，参数方程和普通的函数有什么区别？参数方程可以同一个x对应两个不同的y，这也就意味着可能会出现曲线的切线垂直于x轴，也就是$\frac{dy}{dx}$导数不存在。所以如果求某曲线的切线，如果算得**导数不存在**，**不一定**意味着曲线不光滑，有可能其切线垂直于x轴。只有当$\varphi'(t)$和$\psi'(t)$都为零才是不光滑。

二阶求导怎么办？

$\frac{dy}{dx}$

$=\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{d^2y}{dx^2}$

$=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$

$=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

左侧就是$\frac{dy}{dx}$再对t求一次导。

这里要注意！有些同学还是常用y', y''来标记导数，做题时要分清y'是y对哪个变量（$t?x$?）进行求导。对于这类题目，$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$，所以问题中询问的y'一般指的是y对x求导。

所以写导数要确定是对谁求导，如果存在分不清的情况建议先写成$\frac{dy}{dx}$或者$y'|_x$，等能够分清了再偷懒。清晰地标注可以提供更清晰的思路，这对于后续多元函数的微分积分也非常有帮助。

例题：

已知$\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}), \\ y=\sqrt{1+t^2}, \end{cases}$求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

高阶导数求导

d^2x、dx^2、$d(x^2)$有什么区别？

d^2x是两次微分$d(dx)$，dx^2是$dx\cdot dx$，$d(x^2)$是对x^2求微分，是$2xdx$。

如果把求导$\frac{d}{dx}$看成一个算子（运算方式），那么它作用两次就是$(\frac{d}{dx})^2$，所以$\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{d}{dx})^2y$。

1. **莱布尼兹公式：**

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$$

这明显适合u和v其中有一个是正项低次多项式的情况。——如果说没有，我们就要想办法去转化。比如求导或者移项得到递推式。

例题：

设$f(x)=(x^2+3)\cos^2 x$，求$f^{(100)}(0)$的值.

2. 找规律构造：

找规律向来是作为“智力小测验”，所以构造自然难度相对较高。其核心思路是找到某些不变项，找到某些改变项，并且改变项与n有规律。

例题：

$y=\frac{x-x^2}{x^2-x-6}$求$y^{(n)}$

3. 泰勒展开：

例题：

$f(x)=x^{100}e^{-x^2}$求$f^{(200)}(0)$

微分

重要定理

函数在x_0处可微当且仅当f在x_0可导，并且在可微时有

$df(x_0)=f'(x_0)\triangle x$

与导数的关系

一元函数中，可导和可微是等价的，微分运算具有与求导运算相同的基本性质。

一阶微分形式不变性

无论将$y=f(u)$看做是以u为自变量的函数，还是看做是以u为中间变量的复合函数，一阶微分dy在形式上是不变的，均可表示为$dy=f'(u)du$的形式。

书上有一句话：作为中间变量u，微分du与改变量$\triangle u$一般是不同的。

是因为没说趋向于零么？但作为自变量$dx=\triangle x$，这里指的就是x趋向于零

——实际上，从定义出发考虑$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)dy=f'(x_0)\triangle x$，所以明显他们一般不同。

一阶形式不变形通常是求复合函数的微分，可以使得层次更加分明。当然也可以用来**理解隐函数和参数方程求导。**

$\begin{cases}x=\tan t,\\ y=\sec^2 t,\end{cases}$求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

微分中值定理

期中考应该只涉及一点点内容

$$\begin{cases}\text{费马定理}\\ \text{罗尔定理}\\ \text{拉格朗日中值定理}\\ \text{柯西中值定理}\end{cases}$$

费马定理:

设x_0为函数f的极值点，如果f在x_0处可微，则$f'(x_0)=0$

罗尔定理:

如果函数f满足:

1.在闭区间$[a,b]$上连续;

2.在开区间(a,b)内可导;

3.$f(a)=f(b)$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0.$

剩下两个定理见书，核心思想和罗尔定理类似，构造函数使其满足罗尔定理。

一般熟知这四个定理的结论和证明过程即可。考试主要从罗尔定理出发考察，通过“构造原函数”求解。

例题:

设$F(x)=\frac{f(x)}{1+x^2}$，则$F(x)$在在$[0,2]$上连续，在 $(0,2)$内可导，且$f(2)=5f(0)$ ，证明:
$\exists\xi\in(0,2)$ ，使$(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

练习题

1. 计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$

2. 计算极限$\lim_{n\to\infty}(\frac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1+\frac{1}{n}}})$

3. 计算极限$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}{e^x}$

4. 设曲线$C:\begin{cases}x=te^e-t^2,\\y=2e^t+1,\end{cases}$

(1)求C在x=0处的切线方程；(2)求$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

5. 曲线C的极坐标方程为$r=e^\theta+\theta$，求曲线在$\theta=\frac{\pi}{2}$处的切线方程.

6. 设$u=f(\sin^2 x+y)$，f二阶可导，其中$y=y(x)$满足方程$e^y-e^x=xy$，试求$\frac{du}{dx}$ $\frac{d^2u}{dx^2}$.

7. 分析$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}\ln|1+x|}}{(e^x-1)(x-2)}$的间断点及其类型

8. 已知$f(x)=\arctan x-\operatorname{arccot} x$，求$f^{(8)}(0)$

题目以及答案来源：卢兴江老师、路老师、历年卷

讲义编写：刘子涵