微积分期中辅学讲义（答案版）

极限

$\varepsilon-\delta$语言/$\varepsilon-N$语言

顾名思义，找到ε和δ/N的关系。

例题：

用$\varepsilon-N$语言证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{n^2+2}=2$

答案：
取$N=[\frac{4}{\varepsilon}]+1$
(这里辅学上课的时候没讲清楚，N需要取整数，所以说要取整后加一！！考试的时候要记得进行取整！！)
对$\forall\varepsilon>0$，当$n\geqslant N$都有
$\left|\frac{2n^2-n+1}{n^2+2}-2\right|$
$=\left|\frac{3+n}{n^2+2}\right|<\left|\frac{4}{n}\right|<\varepsilon$

用$\varepsilon-\delta$语言证明极限$lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x-\cos x=1$

答案：
取$\delta=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$
对$\forall\varepsilon>0$，当$0<\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$时，都有
$|\sin x-\cos x-1|$
$=\left|\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})-\sin\frac{\pi}{4}\right|$
$=2\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\sin(x-\frac{\pi}{2})\right|<2\sqrt{2}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$

数列极限

定义法、唯一性、有界性、保号性、四则运算法则

夹逼定理

定义法很好，但是需要猜出极限值。有没有什么除了定义法之外的方法来判断收敛性呢？

1. 确界原理→单调有界准则
2. 柯西准则

这里有一个定理很重要。数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_n\}$的任意子列都收敛并且收敛于相同的极限。

数列递推式

对于递推式，一般而言先通过单调有界准则等来**判断出是否收敛**，然后**将递推式两侧同时求极限**分析极限值。

如果没法判断单调性，也可以**先假设收敛**，求解极限值后再**通过递推式返回证明数列收敛**。

例题：

$a_1=2,a_{n+1}=\frac{a_n(a_n^2+3)}{3a_n^2+1},n=\mathbb{N}^+$请问数列$\{a_n\}$是否收敛，如果收敛，求出$\lim_{n\to\infty}a_n$
答案：
$a_{n+1}-a_n=\frac{2a_n(1-a_n^2)}{3a_n^2+1},a_n>0$
所以需要判断$1-a_n^2$的正负号
$1-a_{n+1}^2=\frac{(1-a_n)^3}{(3a_n^2+1)^2}$
$\because 1-a_1<0$
$\therefore 1-a_n^2<0$
$\therefore a_{n+1}<a_n$
$\{a_n\}$单调递减有下界，由单调有界准则，$\{a_n\}$收敛，对递推式左右两侧均取极限。
得$a=\frac{a(a^2+3)}{3a^2+1}$
$a=\pm 1$(由于保号性，将-1舍去)
综上$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n+3}{a_n+1},n=\mathbb{N}^+$求$\lim_{n\to\infty}a_n$
答案：
向上题类似的方法发现没有单调性，假设a_n收敛，则将递推式左右两侧均取极限$n\longrightarrow\infty$
。
$a=\frac{a(a^2+3)}{3a^2+1}$
解得$a=\pm\sqrt{3}$，由保号性舍去$-\sqrt{3}$
验证收敛性：

$0\leqslant\left|a_{n+1}-\sqrt{3}\right|=\left|\frac{(a_n-\sqrt{3}(1-\sqrt{3}))}{a_n+1}\right|<(\sqrt{3}-1)\left|a_n-\sqrt{3}\right|<\ldots<(\sqrt{3}-1)^n$
由夹逼定理可得数列的确收敛于$\sqrt{3}$

函数极限

等价无穷小替换

$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1-x^2)}{x\sin^2 x}$

答案:

=$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-x^2)}{x\cdot x^2}$

=-1

泰勒展开

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$

答案:

-6

洛必达法则

能力排行: e^x很强 $\ln x$很弱小

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0^+} -x$

$=0$

1. $\frac{0}{0}$型

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}$

$=1$

2. $\infty-\infty$型

变成$\frac{0}{0}$型

$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^4}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin x}{3x^2}$

$=\frac{2}{3}$

3. 0^0型

$$\lim_{x\to 0^+} x^{2\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \ln x}$$
$$= 1$$

4. 1^∞型

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$$
取$t=\frac{1}{x}$
$$= \lim_{t\to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}}$$
$$= e^2$$

5. ∞^0型

$$\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}}$$
$$= e^{\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}}}$$
$$= e$$

化成指数形式!

经典例题:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}$$
$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$
$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$
$$= -\frac{e}{2}$$

连续性

间断点类型

第一类间断点: 左右极限**都存在**。如果左右极限**相等**但是不等于该点的函数值或者该点函数值不存在, 那么就是**可去间断点**; 如果左右极限**存在但不相等**, 那么就是**跳跃间断点**。

第二类间断点: 左右极限**至少有一个不存在**, 或者说是间断点且不是第一类间断点。

连续性判断

根据定义判断，通过计算左右极限来判断属于什么间断点。通常先找到“可能的间断点”再去验证其是否为间断点。

例题：

设函数$f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}-1$，求函数$\frac{1}{f(x)}$的间断点，并判断它们的类型。

9. 考虑间断点即考虑 $\frac{1}{f(x)}$ 没有定义的点.

①当 $f(x)$ 无定义时，$x-1=0$，$x=1$

而对 $x\to1^+$，有 $\frac{x}{x-1}\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$

则 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{f(x)}=0$

$x\to1^-$ 时，$\frac{x}{x-1}\to-\infty$，$f(x)\to-1$

则 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{f(x)}=-1$

$0\neq-1$，则 $x=1$ 为跳跃间断点；

② 当 $f(x)=0$ 时，同样 $\frac{1}{f(x)}$ 无定义

此时 $e^{\frac{x}{x-1}}-1=0$ 解得 $x=0$

而 $x\to0$ 时，$f(x)\to0$，

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{f(x)}$ 不存在，则 $x=0$ 为第二类间断点.

综上，$\frac{1}{f(x)}$ 的间断点为 $x=0$（第二类间断点）

和 $x=1$（跳跃间断点）.

有界闭区间上连续函数的性质

有界性，最大、最小值定理、零点存在定理（衍生：不动点）、介值定理

导数

定义

设函数$y=f(x)$在x_0的某个邻域内有定义，如果极限$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称$f$在$x_0$**可导**，$x_0$为$f$的**可导点**。**极限值**为$f$在$x_0$处的**导数**，记为$f'(x)$；当此极限不存在时，则称$f(x)$在$x_0$**不可导**。

存在性

可导和连续的关系：**可导必连续，连续不一定可导。**

定理：设函数f在x_0的某个领域内有定义，则f在x_0处可导**当且仅当**分别左、右可导，且左、右导数值相等。

导数也是极限，所以沿用分析极限是否存在的方法，我们分析导数是否存在，往往去分析f在x_0处左、右导数**是否存在并且是否相等**。

例题：

已知$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}$在$\mathbb{R}$上可导，求常数a,b的值。

6. 由于 $x>1$ 时, 在 $n\to\infty$ 时有 $n(x-1)\to+\infty$, 有 $e^{n(x-1)}\to+\infty$,

此时 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}}{e^{n(x-1)}}=2x$.

$x<1$ 时, 在 $n\to\infty$ 时有 $n(x-1)\to-\infty$, 有 $e^{n(x-1)}\to 0$,

此时 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}=ax^2+b$

而 $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^0+a+b}{e^0+1}=\frac{a+b}{2}+1$.

则有 $f(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ \frac{a+b}{2}+1, & x=1\\ ax^2+b & x<1\end{cases}$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,

此时有 $f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)$

且 $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}ax^2+b=a+b$, $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}2x=2$.

则有 $\frac{a+b}{2}+1=a+b=2$ 即 $a+b=2$.

又由可导则应有 $f'_-(1)=f'_+(1)$.

且 $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax^2+b-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax^2+b-(a+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1^-}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1}=2a$,

$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}=2$

从而有 $2a=2$, 即 $a=1$, 因此 $b=2-a=1$.

计算

基本初等函数求导公式（见书，请务必熟记）

四则运算：**前提是各个函数在x_0处均可导！**

线性性质

$\frac{d}{dx}(\alpha f+\beta g)\,|x=x_0=\alpha\frac{df}{dx}|x=x_0+\beta\frac{dg}{dx}|_{x=x_0}$

相乘

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

相除

$(\frac{f}{g})'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

反函数求导

$y=f(x_0)$ 在 $U(x_0)$内严格单调，在 x_0可导且 $f'(x_0)\neq 0$，$y_0=f(x_0)$

则反函数$g(y)$在y_0处可导，$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

复合函数求导

链式法则：设函数g在x_0处可导，f在对应点$u_0 = g(x_0)$处可导，则复合函数 $f(g(x_0)) = f'(u_0)g'(x_0)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$

隐函数求导

函数两边同时对x求导。

分清楚怎么样算是“对x求导”，对于某一个参量而言，比如a，那么$a'x$的确是等于0。但是y与x相关，并不是相互独立的量，所以说**对x求导时，y并不是变成0，而是变成y'。**

例题：

设$y = f(x)$是由方程$e^{(x+y)} - 2xy = e$所确定的隐函数

(1) 求$f'(0)$ (2) 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{(y-1)\sin(ex^2)}{\sqrt{1+2x^3}-1}$

8.(1)对等式 $e^{x+y}-2xy=e$，代入$x=0$ 则 $e^y=e$，$y=1$.

再对该等式两端对x求导有

$e^{x+y}\cdot(1+y')-2(xy'+y)=0$,

代入$x=0, y=1$. 有 $e(1+y')-2=0$，解得 $y'=\frac{2}{e}-1$

即 $f'(0)=\frac{2}{e}-1$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{(y-1)\sin(ex)}{\sqrt{1+2x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(y-1)\cdot ex}{\frac{1}{2}\cdot(2x^2)} = e\lim_{x\to 0}\frac{y-1}{x}$

又因为 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{y-1}{x} = \frac{2}{e}-1$

则 $\lim_{x\to 0}\frac{(y-1)\sin(ex)}{\sqrt{1+2x^2}-1} = e\cdot f'(0) = 2-e$

对数求导法

为什么要取对数？

1. **幂指函数**：幂指函数一般将其转换为以e为底数，$g(x)$为幂的指数函数。那么在这种情况下，因为左边是$f(x)$，右边是e的指数函数，可以对两边都取对数化简计算。
   例题：
   求$f(x) = (\ln x)^{\sin x \cos x} (x > 1)$的导数
   $\ln f(x) = \sin x \cos x \ln(\ln x)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\cos^2 x - \sin^2 x)\ln(\ln x) + \sin x\cos x\frac{1}{x\ln x}$
$f'(x) = (\ln x)^{\sin x\cos x} \cdot ((\cos^2 x - \sin^2 x)\ln(\ln x) + \sin x\cos x\frac{1}{x\ln x})$

2. **连乘连除形式**：取对数之后可以将原来的分式变为简单式的加减。
   例题：
   求函数 $y = \frac{(x+1)^2(x+3)^{\frac{2}{3}}}{(x^{x+2})\sqrt{x-1}}(x > 1)$的导数
   $\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{2}{3}\ln(x+3) - (x+2)\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1)$
   $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{2}{3(x+3)} - \frac{x+2}{x} - \frac{1}{2x-2}$
   $y' = \frac{(x+1)^2(x+3)^{\frac{2}{3}}}{(x^{x+2})\sqrt{x-1}} \cdot (\frac{2}{x+1} + \frac{2}{3(x+3)} - \frac{x+2}{x} - \frac{1}{2x-2})$

参数方程求导

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

如果$\varphi(t)$和$\psi(t)$都有连续的导函数，并且对于任何$t \in [\alpha, \beta]$ 不同时为零，则我们称此平面曲线为光滑曲线。

注意，参数方程和普通的函数有什么区别？参数方程可以同一个x对应两个不同的y，这也就意味着可能会出现曲线的切线垂直于x轴，也就是$\frac{dy}{dx}$导数不存在。所以如果求某曲线的切线，如果算得**导数不存在**，**不一定**意味着曲线不光滑，有可能其切线垂直于x轴。只有当$\varphi'(t)$和$\psi'(t)$都为零才是不光滑。

二阶求导怎么办？

$\frac{dy}{dx}$

$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{d^2y}{dx^2}$

$= \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$

$= \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

左侧就是$\frac{dy}{dx}$再对t求一次导。

这里要注意！有些同学还是常用y', y''来标记导数，做题时要分清y'是y对哪个变量（$t?x$?）进行求导。对于这类题目，$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$，所以问题中询问的$y'$一般指的是$y$对$x$求导。

所以写导数要确定是对谁求导，如果存在分不清的情况建议先写成$\frac{dy}{dx}$或者$y'|_x$，等能够分清了再偷懒。清晰地标注可以提供更清晰的思路，这对于后续多元函数的微分积分也非常有帮助。

例题：

已知$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2}, \end{cases}$求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

9. 由$\begin{cases} x = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}$. 有$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = t$,

又 $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = \sqrt{1+t^2}$.

高阶导数求导

d^2x、dx^2 、$d(x^2)$有什么区别？

d^2x是两次微分$d(dx)$，dx^2 是$dx \cdot dx$，$d(x^2)$是对x^2求微分，是$2xdx$。

如果把求导$\frac{d}{dx}$看成一个算子（运算方式），那么它作用两次就是$(\frac{d}{dx})^2$，所以$\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{d}{dx})^2y$。

1. **莱布尼兹公式：**

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

这明显适合u和v其中有一个是正项低次多项式的情况。——如果说没有，我们就要想办法去转化。比如求导或者移项得到递推式。

例题：

设$f(x) = (x^2+3)\cos^2 x$，求$f^{(100)}(0)$的值.

解法类似：

8. $f(x) = (x^2+3)\cos^2 x = (x^2+3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+\cos 2x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(x^2+3)\cos 2x$

则 $f^{(10)}(x) = \frac{1}{2} \cdot [(x^2+3)\cos 2x]^{(10)}$

$= \frac{1}{2}[(x^2+3)(\cos 2x)^{(10)} + 10 \cdot 2x \cdot (\cos 2x)^{(9)} + \frac{10\times 9}{2} \cdot 2(\cos 2x)^{(8)} + 0]$

$= \frac{1}{2}[(x^2+3) \cdot 2^{10} \cdot (-\cos 2x) + 20x \cdot 2^9 \cdot (-\sin 2x) + 90 \cdot 2^8(\cos 2x)]$

代入$x=0$则

$f^{(10)}(0) = \frac{1}{2}[-3 \cdot 2^{10} + 0 + 90 \cdot 2^8] = 2^7 \cdot (90-12)$

$= 128 \times 78 = 9984$.

2. 找规律构造：

找规律向来是作为“智力小测验”，所以构造自然难度相对较高。其核心思路是找到某些不变项，找到某些改变项，并且改变项与n有规律。

例题:

$y=\frac{x-x^2}{x^2-x-6}$求$y^{(n)}$

答案:

$y=\frac{-6}{x^2-x-6}-1$

$=\frac{6}{5}(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3})-1$

$y'=\frac{6}{5}((-1)\frac{1}{(x+2)^2}-(-1)\frac{1}{(x-3)^2})$

$y''=\frac{6}{5}((-1)(-2)\frac{1}{(x+2)^3}-(-1)(-2)\frac{1}{(x-3)^3})$

$y^{(n)}=\frac{6(-1)^n n!}{5}(\frac{1}{(x+2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-3)^{n+1}})$

3. 泰勒展开:

   例题:

   $f(x)=x^{100}e^{-x^2}$求$f^{(200)}(0)$

   对e^{-x^2}泰勒展开

   $f(x)=x^{100}(1-x^2+\frac{x^4}{2!}+...+\frac{(-x^2)^n}{n!})$

   $=x^{100}-x^{102}+...+\frac{(-1)^{50}}{50!}x^{200}+...$

   对整体泰勒展开

   $f(x)=f(0)+f'(0)x+...+\frac{f^{(200)}(0)}{200!}x^{200}+...$

   $\therefore f^{(200)}(0)=\frac{200!}{50!}$

微分

重要定理

函数在x_0处可微当且仅当f在x_0可导，并且在可微时有

$df(x_0)=f'(x_0)\triangle x$

与导数的关系

一元函数中，可导和可微是等价的，微分运算具有与求导运算相同的基本性质。

一阶微分形式不变性

无论将$y=f(u)$看做是以u为自变量的函数，还是看做是以u为中间变量的复合函数，一阶微分dy在形式上是不变的，均可表示为$dy=f'(u)du$的形式。

书上有一句话：作为中间变量u，微分du与改变量$\triangle u$一般是不同的。

是因为没说趋向于零么？但作为自变量$dx=\triangle x$，这里指的就是x趋向于零

——实际上，从定义出发考虑$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0) dy=f'(x_0)\triangle x$，所以明显他们一般不同。

一阶形式不变形通常是求复合函数的微分，可以使得层次更加分明。当然也可以用来**理解隐函数和参数方程求导。**

$\begin{cases} x=\tan t, \\ y=\sec^2 t, \end{cases}$求 $\frac{dy}{dx}$ ，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

没啥特殊的，就是一道很基础的题目（

微分中值定理

期中考应该只涉及一点点内容

$$\begin{cases} \text{费马定理} \\ \text{罗尔定理} \\ \text{拉格朗日中值定理} \\ \text{柯西中值定理} \end{cases}$$

费马定理：

设x_0为函数f的极值点，如果f在x_0处可微，则$f'(x_0)=0$

罗尔定理：

如果函数f满足：

1.在闭区间$[a,b]$上连续；

2.在开区间(a,b)内可导；

3.$f(a)=f(b)$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0.$

剩下两个定理见书，核心思想和罗尔定理类似，构造函数使其满足罗尔定理。

一般熟知这四个定理的结论和证明过程即可。考试主要从罗尔定理出发考察，通过“构造原函数”求解。

例题：

设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且$f(2)=5f(0)$，证明：$\exists\xi\in(0,2)$，使$(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

证：设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$，则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $F(2)=\dfrac{f(2)}{5}=f(0)=F(0)$.

由罗尔定理得 $\exists\xi\in(0,2)$ 使得 $F'(\xi)=\dfrac{(1+\xi^2)f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{(1+\xi^2)^2}=0$，即 $(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

练习题

1. 计算极限$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x\sqrt{\cos x})(1+\cos x\sqrt{\cos x})}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2\cdot2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac12x^2\cdot(1+1+1)}{2x^2}$

$=\dfrac{\frac32}{2}=\dfrac34$

2. 计算极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac12}}+\ldots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1+\frac1n}}\right)$

5. 由于 $\dfrac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac12}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac1n}}>\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac1n}}$

且 $\dfrac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac12}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac1n}}<\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6}}$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac1n}}=\dfrac16\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{n^3\sqrt{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}}}=\dfrac16\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac1n)(2+\frac1n)}{1\times1}=\dfrac13$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\sqrt{n^6}}=\dfrac16\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\dfrac16\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac1n)(2+\frac1n)=\dfrac13$

从而由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac12}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac1n}}=\dfrac13$

3. 计算极限$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac1x)^{x^2}}{e^x}$

$\lim_{x\to\infty}e^{x^2\ln(1+\frac1x)-x}$

Taylor:

$=e^{\lim_{x\to\infty}x^2(\frac1x-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x}$

$=e^{\lim_{x\to\infty}x-\frac12-x+o(\frac1x)}$

$=e^{-\frac12}$

4. 设曲线$C:\begin{cases}x=te^e-t^2,\\ y=2e^t+1,\end{cases}$

(1)求C在x=0处的切线方程；(2)求$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

10. (1) $x=0$ 时 有 $te^t-t^2=t(e^t-t)=0$

解得 $t=0$ 或 $e^t=t$ (舍, 因为有 $e^x \geq x+1$ 成立)

此时 $y=2e^t+1=2e^0+1=3$.

又因为 $\frac{dx}{dt}=te^t+e^t-2t$, $\frac{dy}{dt}=2e^t$

则 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^t}{(t+1)e^t-2t}$, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{2e^0}{(0+1)e^0-0}=2$

即切线斜率为2, 从而 C在 $x=0$ 处切线方程为 $y-3=2x$. 即 $y=2x+3$

(2) 又 $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{2e^t[(t+1)e^t-2t]-2e^t[(t+1)e^t+e^t-2]}{((t+1)e^t-2t)^2}=\frac{2e^t(2-e^t-2t)}{[(t+1)e^t-2t]^2}$

从而 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2e^t(2-e^t-2t)}{[(t+1)e^t-2t]^2}}{(t+1)e^t-2t}=\frac{2e^t(2-e^t-2t)}{[(t+1)e^t-2t]^3}$

则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{2e^0(2-e^0-0)}{(e^0-0)^3}=2.$

5. 曲线C的极坐标方程为$r=e^\theta+\theta$, 求曲线在$\theta=\frac{\pi}{2}$处的切线方程.

10. 利用极坐标方程, 结合极坐标与直角坐标变换公式 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$.

则曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=(e^\theta+\theta)\cos\theta \\ y=(e^\theta+\theta)\sin\theta \end{cases}$

从而 $\frac{dx}{d\theta}=(e^\theta+1)\cos\theta+(e^\theta+\theta)\cdot(-\sin\theta)$

$\frac{dy}{d\theta}=(e^\theta+1)\sin\theta+(e^\theta+\theta)\cos\theta$

有 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{(e^\theta+\theta)\cos\theta+(e^\theta+1)\sin\theta}{-(e^\theta+\theta)\sin\theta+(e^\theta+1)\cos\theta}$,

在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{(e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}+(e^{\frac{\pi}{2}}+1)\sin\frac{\pi}{2}}{-(e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}+(e^{\frac{\pi}{2}}+1)\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{-(e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2})}$

且此时 $x=(e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}=0$; $y=(e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}$.

从而切线方程为 $y-(e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2})=-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}}x$

6. 设$u=f(\sin^2 x+y)$, f二阶可导, 其中$y=y(x)$满足方程$e^y-e^x=xy$, 试求$\frac{du}{dx}$ $\frac{d^2u}{dx^2}$.

12、对 $z=\sin^2 x+y$，有 $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ 成立.

此时 $u=f(z)$，则 $\frac{du}{dz}=f'(z)$.

而 $\frac{dz}{dx}=2\sin x\cos x+\frac{dy}{dx}=\sin 2x+\frac{dy}{dx}$.

又 $y=y(x)$ 满足方程 $e^y-e^x=xy$

对方程两边对 x 求导有 $e^y\cdot y'-e^x=xy'+y$

解得 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+y}{e^y-x}$

从而 $\frac{du}{dx}=f'(z)\cdot\left(\sin 2x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)=f'(\sin^2 x+y)\cdot\left(\sin 2x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)$

在此基础上，$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{df'(z)}{dx}\cdot\left(\sin 2x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)+f'(z)\cdot\frac{d}{dx}\left(\sin 2x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)$.

又 $\frac{df'(z)}{dx}=\frac{df'(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=f''(z)\cdot\left(\sin 2x+\frac{dy}{dx}\right)=f''(\sin^2 x+y)\cdot\left(\sin 2x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin 2x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)=2\cos 2x+\frac{(e^x+y')(e^y-x)-(e^x+y)(e^y y'-1)}{(e^y-x)^2}$$

$$=2\cos 2x+\frac{\left(e^x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)(e^y-x)-(e^x+y)\left(\frac{e^y(e^x+y)}{e^y-x}-1\right)}{(e^y-x)^2}$$

$$=2\cos 2x+\frac{(e^{x+y}-xe^x+e^x+y)(e^y-x)-(e^x+y)(e^{x+y}+ye^y-e^y+x)}{(e^y-x)^3}$$

从而 $\frac{d^2u}{dx^2}=f''(\sin^2 x+y)\cdot\left(\sin 2x+\frac{e^x+y}{e^y-x}\right)^2+f'(\sin^2 x+y)\cdot 2\cos 2x$

$+f'(\sin^2 x+y)\cdot\frac{(e^{x+y}-xe^x+e^x+y)(e^y-x)-(e^x+y)(e^{x+y}+ye^y-e^y+x)}{(e^y-x)^3}$

7. 分析 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}\ln|1+x|}}{(e^x-1)(x-2)}$ 的间断点及其类型

11、考虑函数无定义的点，则应满足

$x-1=0$ 或 $|x+1|=0$ 或 $e^x-1=0$ 或 $x-2=0$

故应判断的间断点分别为 $x=-1, x=0, x=1, x=2$.

①对 $x=-1$，由于 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(e^x-1)(x-2)}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{-3(e^{-1}-1)}$

而 $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln|x+1|$ 不存在，从而 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$ 不存在，则其为第二类间断点.

②对 $x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-1}\ln(1+x)}{x\cdot(-2)}$

$=-\frac{1}{2e}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=-\frac{1}{2e}$

则其为可去间断点；

③对 $x=1$，由于 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\frac{\ln 2}{-(e-1)}$

且 $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$ 不存在，从而 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ 不存在，其为第二类间断点；

④对 $x=2$，由于 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{e^x-1}=\frac{e\ln 3}{e^2-1}$

且 $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ 不存在，从而 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ 不存在，其为第二类间断点.

综上，$f(x)$ 有可去间断点 $x=0$，第二类间断点 $x=-1, x=1, x=2$.

8. 已知 $f(x)=\arctan x-\operatorname{arccot} x$，求 $f^{(8)}(0)$

解法类似:

11. 对 $f(x)=\arctan x$，有 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

转化可得 $(1+x^2)f'(x)=1$，对等式两边求 n 阶导. $(n\geq2)$

由莱布尼茨公式，有

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+n\cdot2xf^{(n)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2f^{(n-1)}(x)+0=0.$$

此时令 $x=0$，则对上式有

$$f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0.\quad(n\geq2)$$

则 $f^{(7)}(0)+6\times5f^{(5)}(0)=0$，即 $f^{(7)}(0)=-30f^{(5)}(0)$

$f^{(5)}(0)+4\times3f^{(3)}(0)=0$，即 $f^{(5)}(0)=-12f^{(3)}(0)$

$f^{(3)}(0)+2\times1f'(0)=0$，即 $f^{(3)}(0)=-2f'(0)$

又 $f'(0)=1$，则 $f^{(7)}(0)=360f^{(3)}(0)=-720f'(0)=-720$.

题目以及答案来源：卢兴江老师、路老师、历年卷

讲义编写：刘子涵