微积分 (H) I 期末考复习讲义

EnDyS

1 前言

本讲义希望通过用较简单的文字与数学语言罗列微积分上学过的知识点，并分享自己的思考理解。故讲义没有具体罗列出详细的定理推论，如有疑惑请翻阅书本，如发现错误请与我或者老师同学交流，谢谢!

2 极限

方法总结 2.1

重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

同阶无穷小

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$$

洛必达法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

泰勒展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

指数化

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

2.1 洛必达法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例题:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\sin\sin x)\arctan x}{1-\sqrt{1-x^4}}.$$

2.2 泰勒定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

例题：* 下题并非真题，仅当作复习。虽然期末考较少泰勒展开，但其应用广泛，有必要略知一二。

如果不清楚一个函数如何求导，我们仍然可以通过某些方法去估计该函数的导数，例如

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi)$$

当然，类似方法也作为计算机计算导数数值解求解法

那么，类似于上面的方法，我们应该如何计算二阶导数呢？请你写出类似的形式。

Hint: 假设有函数 $f(x) = xe^x$，你如何在不求导的情况下估计二阶导数?

3 导数及其应用

3.1 导数

3.1.1 隐函数求导

例题:

设 $y = x^{\tan(3x)} + (\arcsin 2x)^3 + \ln 5$，求 $\frac{dy}{dx}$

3.1.2 莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)},$$

例题:

已知$f(x) = x^2 \ln(1 - x)$. 则$n \geq 3$ 时$f^{(n)}(x) =$

3.2 单调性与极值点

例题:

设n 为正整数, $n \neq 7$, 试比较$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 与$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 的大小.

证明不等式$1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

3.3 凹凸、曲率与渐近线

3.3.1 凹凸

例题:

设曲线 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 2, \\ y = t^3 - 3t + 5 \end{cases}$ 决定，求曲线的凹凸区间及拐点.

3.3.2 曲率

3.3.3 渐近线

1. 垂直渐近线

   $x \to x_0$ 时，$f(x) \to \infty$；

2. 斜/水平渐近线

   $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$；

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$$

例题:

求曲线 $y=e^{\frac{1}{|x|}}\arctan\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$ 的间断点和渐近线

4 微分中值定理

方法总结 4.1

费马定理

设 x_0 为函数 f 的极值点. 如果 f 在 x_0 处可微，则

$$f'(x_0)=0.$$

罗尔定理

如果函数 f 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) $f(a)=f(b)$;

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad 或者\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

柯西中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例题:

已知函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上二阶可导，且 $a<b<c$, 证明：存在 $\xi\in(a,c)$ 使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-b)(c-a)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

已知函数$f(x)$ 的导函数在$[0,2]$ 上连续，$f(0)=f(2)=0$，且当$x\in(0,2)$ 时有$|f(x)|_{max}=M$.

(1) 求证：$\exists c\in(0,2)$, 使$|f'(c)|\geq M$;

(2) 若对任意$x\in(0,2)$ 有$|f'(x)|\leq M$ 成立，求证：$M=0$.

5 不定积分

5.1 不定积分性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x) \qquad \text{或} \quad \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x;$$
$$\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \qquad \text{或} \quad \int\mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

$$\text{(i)}\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x;$$
$$\text{(ii)}\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

5.2 换元法和分部积分法

5.3 特殊被积函数

方法总结 5.1

1. 有理函数

2. 三角有理函数

$$\text{万能公式：令}\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$$

3. 变量替换

例题：

计算：
$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

计算：
$$\int\frac{1}{5+3\cos x}\mathrm{d}x.$$

6 定积分

6.1 定积分中值定理

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

6.2 常见积分结论

Wallis 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

例题:

求定积分

$$\int_0^{2\pi}x(\sin x)^{10}\mathrm{d}x.$$

设a,b 均为常数,$a>-2,a\neq 0$,求a,b 使得

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\big(1-x^2\big)\mathrm{d}x.$$

6.3 应用

例题:

在第一象限内求曲线 $y=-x^2+1$ 上一点使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的面积最小，并求此最小面积.

6.4 定积分不等式证明

方法总结 6.1

这里只列出一些常见题目的关键词与解法

单纯比较两个形式有些相似的定积分大小 → 两式相减换元比较积分正负号

$$\text{证明: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x(\alpha>0).$$

连续、有界 → 泰勒展开或者构造变上限积分函数

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 且单调递增, 证明:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

较好拆解的函数、积分外有平方 → 柯西不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

这一块卢老师、陈老师书上 P170 有很多例题，大家可以仔细查看。但如果觉得历年卷比较难做不出也不需要太焦虑，重心还是放在把前面的极限求导积分的计算分数都拿到。

6.4.1 微积分基本定理

$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b)$ 称为变上限积分，
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$

例题:

已知函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续且$0\le f(x)\le M$，求证:

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\left[\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right]^2-\left[\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right]^2 \le \frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$