微积分 (H) I 期末考复习讲义 (答案版)

EnDyS

1 前言

本讲义希望通过用较简单的文字与数学语言罗列微积分上学过的知识点，并分享自己的思考理解。故讲义没有具体罗列出详细的定理推论，如有疑惑请翻阅书本，如发现错误请与我或者老师同学交流，谢谢!

2 极限

方法总结 2.1

核心思想是用于联系多项式与其他不同形式的函数例如三角函数、对数函数、指数函数

重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

利用上述重要极限可以证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

同阶无穷小

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$$

洛必达法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

泰勒展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

指数化

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

2.1 复合函数求极限

定理 2.1

设 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数。
若

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0\,(g(x)\neq u_0)\qquad \lim_{u\to u_0} f(u)=A$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A$$

2.2 洛必达法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例题:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^n.$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\exp\{n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\exp\{\frac{\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\exp\{\frac{n}{2(1+n)}\}$$

$$=e^{1/2}$$

或者也可以泰勒展开

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\sin\sin x)\arctan x}{1-\sqrt{1-x^4}}.$$

$$=\lim_{x\to 0}2\frac{(\sin x-\sin\sin x)x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\frac{1-\cos\sin x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}$$

注意这里可以再求一次洛必达的，也可以直接通过等价无穷小的复合函数可以不断地等价无穷小来得到结论。

原因：等价无穷小就是在某处的泰勒展开，而可以不断地等价无穷小是因为最低阶的一项可以一直保留到最后，而高阶项会随着等价无穷小替换越来越高阶，所以可以进行多次等价无穷小替换。

2.3 泰勒定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

例题：* 下题并非真题，仅当作复习。虽然期末考较少泰勒展开，但其应用广泛，有必要略知一二。

如果不清楚一个函数如何求导，我们仍然可以通过某些方法去估计该函数的导数，例如

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi)$$

当然，类似方法也作为计算机计算导数数值解求解法

那么，类似于上面的方法，我们应该如何计算二阶导数呢？请你写出类似的形式。

Hint: 假设有函数 $f(x)=xe^x$，你如何在不求导的情况下估计二阶导数?

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f^{(3)}(\xi)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{1}{6}h^3f^{(3)}(\xi')$$

假设三阶导函数相近

$$f'(x)=\frac{1}{2}(f(x+h)-f(x-h)+\frac{1}{6}h^3f^{(3)}(\xi))$$

3 导数及其应用

3.1 导数

3.1.1 隐函数求导

例题：

设 $y=x^{\tan(3x)}+(\arcsin 2x)^3+\ln 5$，求 $\frac{dy}{dx}$

1. 两边同时对 x 求导，注意 x 对 y 求导得到 y' 或者说 $\frac{dy}{dx}$

2. 两边同时求微分

$$y=x^{\tan(3x)}+(\arctan 2x)^3+\ln 5=e^{\tan(3x)\cdot\ln x}+(\arctan 2x)^3+\ln 5$$

$$y'=e^{\tan(3x)\ln x}\left[\frac{1}{x}\tan(3x)+\frac{3\ln x}{\cos^2 3x}\right]+3\left(\arcsin 2x\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{1-(4x)^2}}+0$$

$$=x^{\tan(3x)}\left[\frac{\tan(3x)}{x}+\frac{3\ln x}{\cos^2 3x}\right]+\frac{6\left(\arcsin 2x\right)^2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

3.1.2 莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)},$$

例题:

已知$f(x) = x^2 \ln(1-x)$. 则$n \geq 3$ 时$f^{(n)}(x) =$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x-1)!}[2x^2 - 2nx + n(n-1)]$$

3.2 单调性与极值点

例题:

设n 为正整数, $n \neq 7$, 试比较$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 与$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 的大小.

构造函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

证明不等式$1 + x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

令两式相减求导

3.3 凹凸、曲率与渐近线

3.3.1 凹凸

例题:

设曲线 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 2, \\ y = t^3 - 3t + 5 \end{cases}$ 决定，求曲线的凹凸区间及拐点.

求二阶导即可，从而曲线有拐点 (2,5)且其上凹区间为$(2, +\infty)$, 下凹区间为$(-\infty, 2)$.

3.3.2 曲率

3.3.3 渐近线

1. 垂直渐近线

   $x \to x_0$ 时，$f(x) \to \infty$；

2. 斜/水平渐近线

   $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$；

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

例题:

求曲线 $y = e^{\frac{1}{|x|}} \arctan \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$ 的间断点和渐近线

考虑$y = e^{\frac{1}{(x)}\arctan\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}}$ 无定义的点,

则考虑$x = 0$, $x = 1$, $x = 2$处,

$x \to 0$ 时, $\arctan\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} > 0$

且此时$\dfrac{1}{(x)} \to +\infty$, 有$e^{\frac{1}{(x)^2}} \to +\infty$

$x > 0$, $\arctan\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} \sim \dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} \sim \dfrac{x}{-1\cdot 2^2} = \dfrac{-x}{4}$

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\dfrac{1}{4}x) = -\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \xlongequal{u=\frac{1}{x}} -\dfrac{1}{4}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}$

$= -\dfrac{1}{4}\lim\limits_{u\to+\infty} e^u$

因此 x=1 是跳跃间断点

$x \to 2$, $e^{\frac{1}{1\times 1}} \to e^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{x}{x-1} \to 2$,

且$\dfrac{1}{(x-2)^2} \to +\infty$, 　则$\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} \to +\infty$

$\arctan\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} \to \dfrac{\pi}{2}$, 　从而$y \to e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi J e}{2}$

因此 x=2 是可去间断点。

.

$x \to \infty$时$\dfrac{1}{|x|} \to 0$, $\dfrac{x}{x-1} \to 1$, $\dfrac{1}{(x-2)^2} \to 0$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \arctan 0 = 0$

即 $\lim\limits_{x\to\infty} y = e^0 \cdot 0 = 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = 0$

则函数有渐近线 y=0.

综上,x=0 为第二类间断点,x=1 为跳跃间断点,

x=2 为可去间断点。

有渐近线 x=0 与 y=0.

4 微分中值定理

方法总结 4.1

费马定理

设 x_0 为函数 f 的极值点. 如果 f 在 x_0 处可微，则

$$f'(x_0)=0.$$

罗尔定理

如果函数 f 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3)$f(a)=f(b)$;

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad \text{或者}\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

柯西中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例题:

已知函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上二阶可导，且 $a<b<c$, 证明：存在 $\xi\in(a,c)$ 使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-b)(c-a)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

设$k=\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{f(c)}{(c-b)(c-a)}$

设$h(x)=k(x-a)(x-b)+mx+n-f(x)$

使得$h(a)=h(b)=h(c)=0$,m,n 为未知常数

分别代入$x=a,x=b,x=c$有

$$\begin{cases}0+ma+n-f(a)=0\\0+mb+n-f(b)=0\\k(c-a)(c-b)+mc+n-f(c)=0\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\n=\frac{bf(a)-ad(b)}{b-a}\end{cases}$$

即$h(x):k(x-a)(x-b)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}-f(x)$

由罗尔定理,$\exists\xi_1,\xi_2\in(a,c)$ 且$\xi_1<\xi_2$

使得$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$

再由罗尔定理,$\exists\xi(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$.使得$h''(\xi)=0$

又$h'(x)=k[(x-b)+(x-a)]+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f''(x)$

$=2kx-k(a+b)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)$

$h''(x) = 2k - f''(x)$

即有$2k - f''(\xi) = 0$从而$k = \dfrac{1}{2}f''(\xi)$

原式得证.

已知函数$f(x)$ 的导函数在$[0,2]$ 上连续, $f(0) = f(2) = 0$, 且当$x \in (0,2)$ 时有$|f(x)|_{max} = M$.

(1) 求证: $\exists c \in (0,2)$, 使$|f'(c)| \geq M$;

(2) 若对任意$x \in (0,2)$ 有$|f'(x)| \leq M$ 成立, 求证: $M = 0$.

(1) 若 $\xi \in (0,1]$，由拉格朗日中值定理得，$\exists c_1 \in (0,\xi)$，使得 $\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0} = f'(c_1)$，则 $f(c_1) \geqslant M$

(2) 通过两端定积分中值定理不等式，得到

$$M = |f(\xi) - f(0)| = \left|\int_0^{\xi} f'(x)dx\right| \leq \int_0^{\xi} |f'(x)|\,dx \leq \int_0^{\xi} Mdx = \xi M$$

$$M = |f(z) - f(\xi)| = \left|\int_{\xi}^{2} f'(x)dx\right| \leq \int_{\xi}^{z} |f'(x)|\,dx \leq \int_{\xi}^{z} Mdx = (2-\xi)M$$

$\int_1^2 |f'(x)|\mathrm{d}x = 2M$,

所以 $|f'(x)| = M$ 再通过罗尔定理得到 $|f'(\xi)| = 0$，故 $M = 0$

5 不定积分

5.1 不定积分性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x) \qquad \text{或} \quad \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \text{或} \quad \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

$$\text{(i)} \int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\text{(ii)} \int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

5.2 换元法和分部积分法

5.3 特殊被积函数

方法总结 5.1

1. 有理函数

2. 三角有理函数

$$\text{万能公式：令} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$$

3. 变量替换

例题:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx = \int \arctan x \cdot (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx$$
$$= \int \frac{\arctan x}{x^2}dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$
$$= -\int \arctan x d\frac{1}{x} - \int \arctan x d \arctan x$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} d \arctan x - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

$$\int \frac{1}{5+3ax}\mathrm{d}x \overset{t-\tan\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{5+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} dantant = \int \frac{1+t^2}{5(1+t^2)+3(1+t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{2}{8+2t^2}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2}d\frac{t}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{2} + C$$

6 定积分

方法总结 6.1

求解定积分区别于不定积分的几个方法

1. 利用奇偶性

$$\int_0^1 (1-x)^{100} x \mathrm{d}x$$

2. 换元、加减常数改变区间

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x$$

6.1 定积分中值定理

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

6.2 常见积分结论

Wallis 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

例题:

求定积分

$$\int_0^{2\pi} x(\sin x)^{10} \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{2\pi} x(\sin x)^{10} dx \xlongequal{u=x-\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u+\pi)\sin^{10}(u+\pi)d(u+\pi)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (u+\pi)\sin^{10} u du = 0 + 2\pi \int_0^{\pi} \sin^{10} u du \quad \text{(奇偶性)}$$
$$= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 u du = 4\pi \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{63}{128}\pi^2$$

设a, b 均为常数,$a > -2, a \neq 0$,求a, b 使得

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\bigl(1 - x^2\bigr) \mathrm{d}x.$$

右式等于 $2\ln 2 - 2$

左式等于

$$\lim_{x \to +\infty} \ln | \frac{x}{(2x+a)^{\frac{2+a-b}{2}}} | - \ln \frac{1}{(2+a)^{\frac{2+a-b}{2}}}$$

$-\ln 2 + \ln(2+a)$ 此时 $a = b$

得到 $a = b = \frac{8}{e^2} - 2$

6.3 应用

例题:

在第一象限内求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上一点使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的面积最小,并求此最小面积.

切线所围面积:

$$s_0 = \frac{1}{2} \cdot (x_0^2 + 1) \cdot \frac{x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{(x_0^2+1)^2}{4x_0} = \frac{1}{4}x_0^3 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4x_0}$$

曲线所围面积:

$$S_1 = \int_0^1 (-x^2+1) dx = -\frac{1}{3}x^3 + x|_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$S = S_0 - S_1 = \frac{1}{4}x_0^3 + \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4x_0} - \frac{2}{3}$$

因此$x_0=\dfrac{1}{3}$时 S 取极小值也取最小值

$$S(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{3}})^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{12\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}=\frac{(1+6+9)\sqrt{3}}{36}-\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}-\frac{2}{3}$$

6.4 定积分不等式证明

方法总结 6.2

这里只列出一些常见题目的关键词与解法

单纯比较两个形式有些相似的定积分大小 → 两式相减换元比较积分正负号

$$\text{证明: }\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x(\alpha>0).$$

连续、有界 → 泰勒展开或者构造变上限积分函数

设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 且单调递增, 证明:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

较好拆解的函数、积分外有平方 → 柯西不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

这一块卢老师、陈老师书上 P170 有很多例题，大家可以仔细查看。但如果觉得历年卷比较难做不出也不需要太焦虑，重心还是放在把前面的极限求导积分的计算分数都拿到。

6.4.1 微积分基本定理

$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b)$ 称为变上限积分，
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$

例题:

已知函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续且$0\leq f(x)\leq M$，求证:

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\left[\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right]^2-\left[\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right]^2\leq\frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

构造函数分析求解

$$\text{令}F(x)=\left(\int_a^x f(t)ut\right)^2-\left(\int_a^x f(t)\sin tdt\right)^2-\left(\int_a^x f(t)astdt\right)^2-\frac{m^2}{12}(x-a)^4$$

$$F'(x)=2(\int_a^x f(t)dt)\cdot f(x)-2(\int_a^x f(t)\sin tdt)\cdot f(x)\sin x-2(\int_a^x f(t).\cos tdt)\cdot f(x)\cos x-\frac{M^2}{3}(x-a)^3$$

$$\leq 2M\left[\int_a^x f(t)dt-\sin x\int_a^x f(t)\sin tdt-\cos x\int_a^x f(t)\cos tdt\right]-M^2\cdot\int_a^x(t-a)^2dt$$

$$\xlongequal{u=x-t} 2M^2\int_{x-a}^0(1-\cos u)\,dx(x-u)-M^2\int_0^{x-a}u^2du$$

$$=2M^3\int_0^{x-a}(1-\cos u)\,du-M^2\int_0^{x-a}u^2du$$

$$=2M^2\int_0^{x-a}(1-\cos u)\,du-M^2\int_0^{x-a}u^2du$$

$$=2M^2\int_0^{x-a}\left(1-\cos u-\frac{1}{2}u^2\right)du$$

$g(x)=(1-\cos x-\frac{1}{2}x^2,\quad g(y)'(x)=\sin xx,\quad$ 因为$\sin x\leq x$始终成立

即对$x\geqslant a$,有$\int_0^{x-a}g(u)du\leq\int_0^{x-a}g(u)du=0$

从而$x\geqslant a$ 时$F'(x)\leq 0$ 恒成立, 则$F(x)$递减

对$b\geqslant a$ 有$F(b)\leq F(a)$成立, 又$F(a)=0$

则有$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leq\frac{M^2}{13}(b-a)^4\,dx$立。

题目以及答案来源：微积分教材、路老师、历年卷

讲义编写：刘子涵