微分中值定理及导数应用

by 混合 2206 谢集

1 微分中值定理

1.1 四个中值定理

> **Fermat 引理**：如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在点 $c\in(a,b)$ 可微，并且 c 是 f 在区间 $[a,b]$ 上的局部极值点（局部最大或最小），那么：
>
> $$f'(c)=0$$

> **Rolle 定理**：如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微。如果 $f(a)=f(b)$，则存在至少一个点 $c\in(a,b)$，使得：
>
> $$f'(c)=0$$

> **Lagrange 中值定理**：如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得：
>
> $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

> **Cauchy 中值定理**：考虑两个函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它们在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，并且 $g'(x)\neq 0$ 对所有 $x\in(a,b)$ 都成立，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得：
>
> $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

中值定理是联系导数和函数值的桥梁。

1.2 例题

例题 1.1：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=1,f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。证明：$\exists\xi,\eta\in[0,1]$ 使得：$f'(\xi)f'(\eta)=1.$

例题 1.2：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。证明：

- 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\xi)=\xi$；
- 对于任意实数 λ，必存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得：

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1.$$

> Hint.
> 构造新的函数再利用中值定理，可以建立更丰富的关系。

例题 1.3：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=0$ 且 $f(x)>0$ ($a<x<b$)。证明不存在常数 $m>0$，使得：

$$\frac{|f'(x)|}{f(x)}\leq m$$

对 $x\in(a,b)$ 成立.

> Hint.
> 如果变成这样，你还看得出来吗?

例题 1.4： 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，$f(0)=0$，且 f 在 $(0,1)$ 上非零。证明：
对于任意正整数 n，均存在 $\xi\in(0,1)$，使得：

$$n\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

例题 1.5：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ($a>0$)，在 (a,b) 上可导，$f(a)\neq f(b)$，求证：
存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得：

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

2 Taylor 公式

2.1 Peano 余项:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

2.2 Lagrange 余项:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(\xi\text{ 介于 }x,a\text{ 之间}).$$

2.3 常见函数的 Taylor 展开：

- 指数函数 e^x：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

- 正弦函数 $\sin(x)$：

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

- 余弦函数 $\cos(x)$：

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

- 对数函数 $\ln(1+x)$：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

- 二项式展开 $(1+x)^n$：

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

例 2.0.1: 求 $\tan(x)$ 的麦克劳林级数，展开到 x^5。

例 2.0.2: 求 $\arctan(x)$ 的麦克劳林级数。

2.4 例题

Taylor 公式的应用很广。

首先 Taylor 公式提供了更多的无穷小量形式，我们可以拿来计算极限。

例 2.1: 计算极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

例 2.2: 计算极限:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

Taylor 公式也可以用来计算/处理高阶导数。

例 2.3: 已知 $f(x)=e^{-x^2}$，求:

$$f^{(2022)}(0)$$

例 2.4: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且有:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-xf(x)}{x^3}=0$$

求:

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0)$$

余项相关的一些有趣的题型:

例 2.5: 设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶连续导数，若:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n\quad(0<\theta<1),$$

且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$，证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

例 2.6: 设 $f(x)$ 二阶连续可导，$f''(x) \neq 0$，若：

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h \quad (0 < \theta < 1),$$

证明：

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{2}.$$

例 2.7: 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 的函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0) \right] = \frac{f'(0)}{2}$$

事实上我们可以发现，Taylor 公式就是拉格朗日中值定理的超级加强版。所以这也提示我们，Taylor 公式是联系函数各阶导数的桥梁。

例 2.8: 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 三阶可导，$f(0) = f(1) = 0$，令 $F(x) = x^3 f(x)$。证明：

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } F'''(\xi) = 0.$$

例 2.9: 设 f 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导，且 $a = \sup\{|f(x)|\}, b = \sup\{|f''(x)|\}$。证明：

$$\sup\{|f'(x)|\} \leq 2\sqrt{ab}.$$

例 2.10: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，$f(a) = f(b) = 0$，证明：

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

> Hint.
> 在哪个点处展开？代入什么值？然后怎么做？

3 杂项

3.1 洛必达法则

洛必达法则的两种形式：

> **洛必达法则**：如果 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, 或 $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ 且 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则：
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 3.1:

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$$

求：

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

3.2 Leibniz 公式

Leibniz 公式是用来计算高阶导数的公式：

> 对于两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，它们在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内 n 阶可导，那么它们的乘积的 n 阶导数为：
>
> $$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

利用 Leibniz 公式，我们可以计算很多单点的高阶导数。

例 3.2:

$$f(x) = x^2 \sin x$$

求 $f^{(2024)}(0)$.

例 3.3:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 4}$$

求 $f^{(2024)}(0)$.

例 3.3: 设:

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

求: $f^{(2024)}(0)$.

3.3 函数的性质分析

这部分不是特别重要，也不是很难，我们直接看一道例题就好了。

例 3.5: 求函数:

$$f(x) = x - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^5}{5}$$

在区间 $[-2, 2]$ 的最大值和最小值。