# 微分中值定理及导数应用

by 混合 2206 谢集

# 1 微分中值定理

## 1.1 四个中值定理

> **Fermat 引理**：如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在点 $c\in(a,b)$ 可微，并且 $c$ 是 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上的局部极值点（局部最大或最小），那么：
>
> $$f'(c)=0$$

> **Rolle 定理**：如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可微。如果 $f(a)=f(b)$，则存在至少一个点 $c\in(a,b)$，使得：
>
> $$f'(c)=0$$

> **Lagrange 中值定理**：如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可微，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得：
>
> $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

> **Cauchy 中值定理**：考虑两个函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它们在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可微，并且 $g'(x)\neq 0$ 对所有 $x\in(a,b)$ 都成立，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得：
>
> $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

中值定理是联系导数和函数值的桥梁。

## 1.2 例题

**例题 1.1**：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0, f(1)=1, f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。证明：$\exists\xi,\eta\in[0,1]$ 使得：$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

这题其实是很简单的，有一个 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，那我们就可以用两次 Lagrange 中值定理：

- 第一次：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}), f'(\xi)=\frac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=1$
- 第二次：存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1), f'(\eta)=\frac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=1$

那么，直接证明完毕了。

**例题 1.2**：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。证明：

- 存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得 $f(\xi) = \xi$；
- 对于任意实数 $\lambda$，必存在 $\eta \in (0, \xi)$，使得：

$$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1.$$

第一问很简单，构造函数：

$$g(x) = f(x) - x,$$

那么就是：

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad g(1) = 1,$$

根据零点存在定理得证。

第二问其实用到了第一问的提示。我们可以发现：

$$g'(x) = [f(x) - x]' = f'(x) - 1,$$

那其实是证明存在 $\eta$ 使得：

$$g'(\eta) = \lambda g(\eta).$$

故技重施，再构造函数：

$$h(x) = \frac{g(x)}{e^{\lambda x}},$$

那么 $h(0) = 0$，$h(\xi) = 0$。根据 Rolle 定理，存在 $\eta \in (0, \xi)$，使得：

$$h'(\eta) = 0.$$

这就是我们要的答案。

> Hint.
> 构造新的函数再利用中值定理，可以建立更丰富的关系。

我们总结一些常见的构造函数技巧：

- $nf(x) + f'(x)$：构造函数 $g(x) = e^{nx}f(x)$。
- $nf(x) - f'(x)$：构造函数 $g(x) = e^{-nx}f(x)$。
- $f^n(x)f'(x)$：构造函数 $g(x) = f(x)^{n+1}$。
- $nf(x) + f'(x)x$：构造函数 $g(x) = f(x)x^n$。

其实「构造函数」是和常微分方程有紧密联系的。现在只要大概找到一点感觉就可以，考试应该是不会考太难的构造函数的（因为老师也没这么无聊）。

**例题 1.3**：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 $(a, b)$ 内可导，$f(a) = 0$ 且 $f(x) > 0$ ($a < x < b$)。证明不存在常数 $m > 0$，使得：

$$\frac{|f'(x)|}{f(x)} \leq m$$

对 $x \in (a, b)$ 成立.

> Hint.
> 如果变成这样，你还看得出来吗?

假设存在 $m$ 成立，我们下面用反证法推出矛盾。

显然：

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leq m, \quad f'(x) - mf(x) \leq 0.$$

好像没法往下做了?

构造函数以获得新条件，设：

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{mx}},$$

则有：

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^{mx} - f(x)me^{mx}}{e^{2mx}} = \frac{f'(x) - f(x)m}{e^{mx}} \leq 0.$$

但是 $g(a) = 0$ 而显然 $g(x) > 0$，且 $g(x)$ 单调不增，那么显然就矛盾了。

**例题 1.4**：设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微，$f(0) = 0$，且 $f$ 在 $(0, 1)$ 上非零。证明：
对于任意正整数 $n$，均存在 $\xi \in (0, 1)$，使得：

$$n\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

移项一下看看：

$$nf'(\xi)f(1-\xi) - f'(1-\xi)f(\xi) = 0.$$

是不是像两个函数的乘积的导数？我们构造函数：

$$g(x) = f(x)f(1-x)$$

那么：

$$g'(x) = f'(x)f(1-x) - f'(1-x)f(x)$$

那这个 $n$ 怎么办呢？肯定是幂函数。我们再构造函数：

$$h(x) = f^n(x)f(1-x)$$

那么：

$$h'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)f(1-x) - f^n(x)f'(1-x) = f^{n-1}(x)(nf'(x)f(1-x) - f'(1-x)f(x))$$

那么我们就可以用 Rolle 定理了。

**例题 1.5**：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $(a > 0)$，在 $(a, b)$ 上可导，$f(a) \neq f(b)$，求证：
存在 $\xi, \eta \in (a, b)$，使得：

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

盲猜用两次中值定理，然后发现一次柯西一次拉格朗日：

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta} = \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{f'(\eta)(b+a)}{2\eta} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\eta)(b+a)}{2\eta}$$

# 2 Taylor 公式

## 2.1 Peano 余项:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

## 2.2 Lagrange 余项:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (\xi \text{ 介于 } x, a \text{ 之间}).$$

## 2.3 常见函数的 Taylor 展开：

- 指数函数 $e^x$：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

- 正弦函数 $\sin(x)$：

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

- 余弦函数 $\cos(x)$：

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

- 对数函数 $\ln(1+x)$：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

- 二项式展开 $(1+x)^n$：

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

**例 2.0.1**: 求 $\tan(x)$ 的麦克劳林级数，展开到 $x^5$。

利用 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$，我们可以得到：

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + o(x^5)}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^2 + o(x^5)\right)$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

**例 2.0.2**: 求 $\arctan(x)$ 的麦克劳林级数。

利用 $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$，我们可以得到：

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

## 2.4 例题

Taylor 公式的应用很广。

首先 Taylor 公式提供了更多的无穷小量形式，我们可以拿来计算极限。

**例 2.1**: 计算极限：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

**例 2.2**: 计算极限：

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

换个元素泰勒展开，没有更简单的方法了。

等价化为：

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{arccot} x}{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

设 $g(x) = \mathrm{arccot} x$，开始求导：

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2+1}, \quad g'(0) = -1.$$

泰勒展开：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x+o(x)\right)}{e-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}$$

进一步化简：

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+o(x)}{e-e\cdot e^{-\frac{1}{2}x+o(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+o(x)}{e\cdot x+o(x)}=\frac{2}{e}.$$

> Hint.
> Taylor 公式就是告诉你怎么把一个函数用无穷小量表示出来。

Taylor 公式也可以用来计算/处理高阶导数。

**例 2.3**: 已知 $f(x)=e^{-x^2}$，求：

$$f^{(2022)}(0)$$

展开 $f(x)$ 的泰勒级数：

$$f(x)=1+(-x^2)+\frac{1}{2}(-x^2)^2+\cdots+o(x^{2022}).$$

系数化简：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{1011}\frac{1}{i!}(-x^2)^i.$$

对照系数：

$$-\frac{1}{1011!}x^{2022}=\frac{f^{(2022)}(0)}{2022!}x^{2022},$$

得：

$$f^{(2022)}(0)=-\frac{2022!}{1011!}.$$

**例 2.4**: 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-xf(x)}{x^3}=0$$

求：

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0)$$

直接泰勒展开：

$$\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+x(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2)+o(x^3)}{x^3}=0.$$

进一步化简：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+f(0)+\left(f'(0)-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{f''(0)}{2}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=0.$$

解得：

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

余项相关的一些有趣的题型：

**例 2.5**: 设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶连续导数，若：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n \quad (0 < \theta < 1),$$

且 $f^{(n+1)}(a) \neq 0$，证明：

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

我们得想个办法把 $\theta$ 表示出来。那自然是用泰勒展开的 Lagrange 余项：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta' h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n.$$

对照一下系数：

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta' h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

化简得：

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta' h)}{n+1}.$$

发现左边好像是导数的定义，那么把极限凑出来：

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a)}{\theta h} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta' h)}{\theta(n+1)}.$$

取极限：

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a)}{\theta h} = f^{(n)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n+1)}(a+\theta' h)}{\theta(n+1)} = f^{(n+1)}(a)\frac{1}{\theta(n+1)}.$$

得到：

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

**例 2.6**: 设 $f(x)$ 二阶连续可导，$f''(x) \neq 0$，若：

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h \quad (0 < \theta < 1),$$

证明：

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}.$$

其实是和 2.6 一模一样的题目。

**例 2.7**: 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 的函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)\right]=\frac{f'(0)}{2}$$

直接泰勒展开就有：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f'(0)\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right].$$

化简得到：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right].$$

计算：

$$\frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{f'(0)}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{f'(0)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)\right]=\frac{f'(0)}{2}.$$

事实上我们可以发现，Taylor 公式就是拉格朗日中值定理的超级加强版。所以这也提示我们，Taylor 公式是联系函数各阶导数的桥梁。

**例 2.8**: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 三阶可导，$f(0)=f(1)=0$，令 $F(x)=x^3f(x)$。证明：

$$\exists\xi\in(0,1),\ \text{s.t. } F'''(\xi)=0.$$

这题可以用 Rolle 定理做，但是用 Taylor 公式更简单。

首先，我们有：

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2}+\frac{F'''(\xi)}{6}.$$

$$F'(0)+\frac{F''(0)}{2}+\frac{F'''(\xi)}{6}=0$$

显然 $F'(0)=x^3f'(x)+3x^2f(x)=0$，$F''(0)=x^3f''(x)+6x^2f'(x)+6xf(x)=0$，那么：

$$\frac{F'''(\xi)}{6}=0.$$

**例 2.9**: 设 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $a=\sup\{|f(x)|\},b=\sup\{|f''(x)|\}$。证明：

$$\sup\{|f'(x)|\}\le 2\sqrt{ab}.$$

经典泰勒展开，直接变形：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2,$$

其中：

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0).$$

不等式化简：

$$|f'(x_0)|\leq\frac{|f(x)|+|f(x_0)|}{|x-x_0|}+\frac{|f''(\xi)|}{2}|x-x_0|\leq\frac{2a}{|x-x_0|}+\frac{b}{2}|x-x_0|.$$

令：

$$|x-x_0|=2\sqrt{\frac{a}{b}},$$

即可得证。

**例 2.10**: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|.$$

> Hint.
> 在哪个点处展开？代入什么值？然后怎么做？

对于任意一个 $x_0\in[a,b]$，套路化地泰勒展开：

$$0=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2,\quad \xi_1\in[a,x_0]$$
$$0=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2,\quad \xi_2\in[x_0,b].$$

$f'(x_0)$ 不好处理，我们套路化地取绝对值最大处的 $f(c)$：

$$f(c)=-\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2,\quad \xi_1\in[a,c]$$
$$f(c)=-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2,\quad \xi_2\in[c,b].$$

放缩得：

$$|f(c)|\leq\frac{1}{2}\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|\min\{(a-c)^2,(b-c)^2\}\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|.$$

# 3 杂项

## 3.1 洛必达法则

洛必达法则的两种形式：

> **洛必达法则**：如果 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$, 或 $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ 且 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则：
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**例 3.1**:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$$

求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

【这题不能用洛必达做，想想为什么】

很好把答案猜出来，根据经典极限，如果 $f(x)=2x^2$ 就符合条件了。所以猜测是 $2$。具体怎么做呢？这种指数有 $x$ 的，我们可以取对数：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$

**例 3.2**:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos x}{x}$$

两个都是不能用洛必达法则的，第一个不是 $\frac{0}{0}$ 也不是 $\frac{\infty}{\infty}$，第二个是极限存在但是导数比极限不存在。所以大家需要谨慎使用。

## 3.2 Leibniz 公式

Leibniz 公式是用来计算高阶导数的公式：

> 对于两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，它们在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内 $n$ 阶可导，那么它们的乘积的 $n$ 阶导数为：
>
> $$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

利用 Leibniz 公式，我们可以计算很多单点的高阶导数。

**例 3.3**:

$$f(x)=x^2\sin x$$

求 $f^{(2024)}(0)$.

这种就是多项式乘导数的形式，直接套用 Leibniz 公式，多项式的部分求几次导就没了。

**例 3.4**:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-2x+4}$$

求 $f^{(2024)}(0)$.

这种题目是分式的形式，我们可以先移项，然后再用 Leibniz 公式，得到递推：

$$(x^2-2x+4)f(x)=x$$

求一阶导：

$$(x^2-2x+4)f'(x)+(2x-2)f(x)=1f'(0)=\frac{1}{4}$$

求 $n>1$ 阶导，我们设 $a_n=f^{(n)}(0)$，那么有：

$$(x^2-2x+4)a_n+n(2x-2)a_{n-1}+n(n-1)a_{n-2}=0$$

$$4a_n-2na_{n-1}+n(n-1)a_{n-2}=0$$

然后发现递推好像解不出来...如果你对高中数列熟悉的话，有一个常见的结论是，「特征多项式是虚根，大概率是周期数列」。所以我们再迭代一次试试看：

$$a_n=\frac{2na_{n-1}-n(n-1)a_{n-2}}{4}$$

$$4a_{n+1}-2(n+1)a_n+(n+1)na_{n-1}=0$$

$$4a_{n+1}-(n+1)\frac{2na_{n-1}-n(n-1)a_{n-2}}{2}+(n+1)na_{n-1}=0$$

$$a_{n+1}=\frac{n(n-1)(n+1)a_{n-2}}{8}$$

答案就是 $a_{2024}=a_2\frac{2024!}{2^{2023}}=\frac{2024!}{2^{2025}}$。

**例 3.5**: 设：

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

求：$f^{(2024)}(0)$.

直接做好像很抽象，先求一阶导：

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

然后就八仙过海了。可以 Taylor，也可以 Leibniz。最简单的当然还是 Taylor。我们这里讲讲 Leibniz 的做法。

根号做不了怎么办？**再求一次导**。

$$f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

更复杂了？并不是，我们可以把 $f'(x)$ 代入！

$$f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2+1)}f'(x)$$

根号消失了！移项：

$$(x^2+1)f''(x) + xf'(x) = 0$$

设 $a_n = f^{(n)}(0)$，那么求 $n > 1$ 阶导：

$$(x^2+1)a_{n+2} + 2xna_{n+1} + n(n-1)a_n + xa_{n+1} + na_n = 0$$

$$a_{n+2} = -n^2 a_n$$

$a_{2024} = 0$。

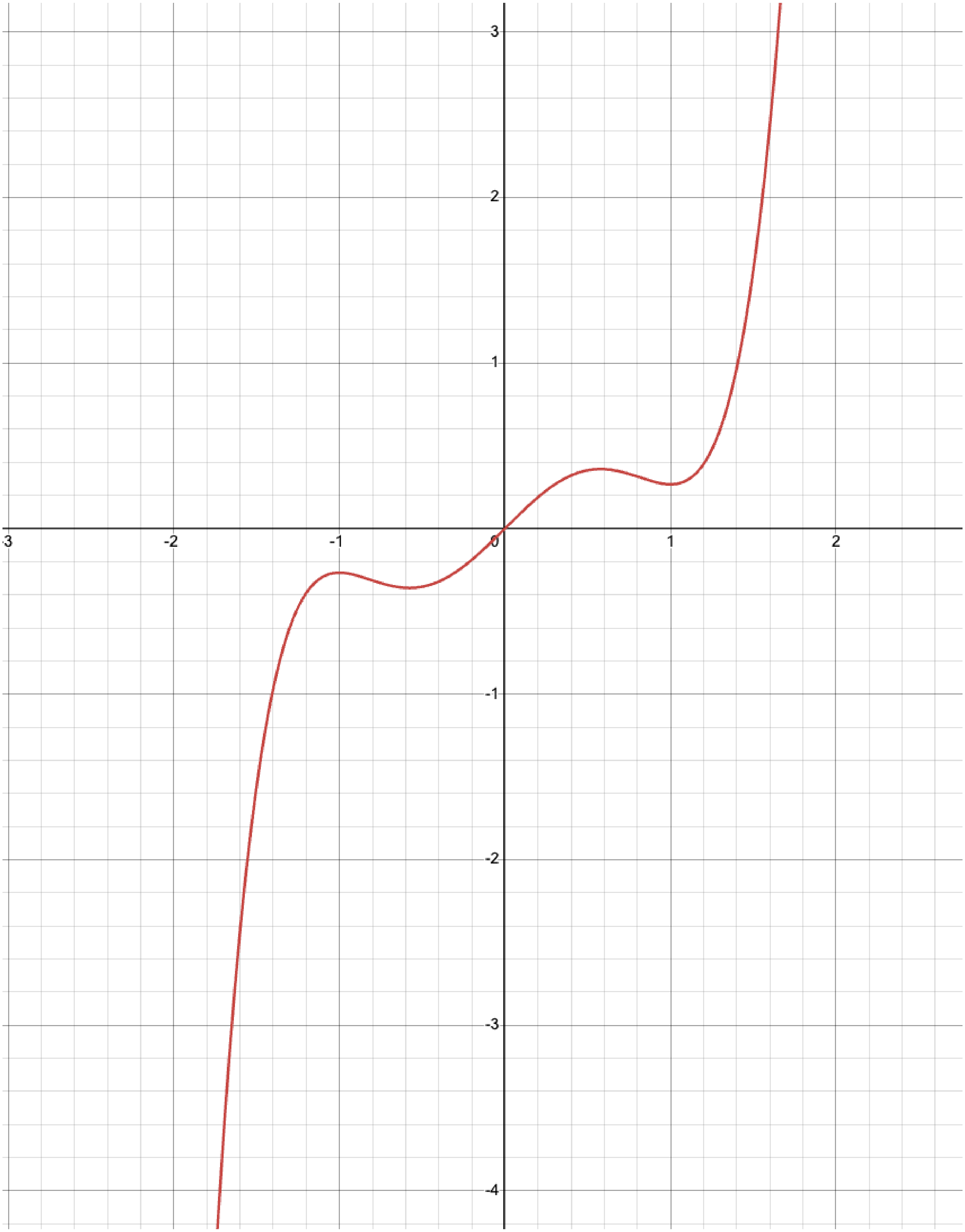
## 3.3 函数的性质分析

这部分不是特别重要，也不是很难，我们直接看一道例题就好了。

**例 3.6**: 求函数：

$$f(x) = x - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^5}{5}$$

在区间 $[-2, 2]$ 的最大值和最小值。




都是在端点处求到的。

# 4 习题

- $$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1}\right).$$

- 设 $a,b>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得：

  $$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b).$$

- 求 $d_n=[\arcsin(x)]^{(n)}(0)$。

- 求 $d_n=[(x+\sqrt{x^2+1})^m]^{(n)}(0), m\in\mathbb{R}$。

- $f:[0,h]\to\mathbb{R}$ 上有一阶连续导数，在 $(0,h)$ 上二阶可导，如果 $f(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,h)$ 使得：

  $$\frac{f(h)-hf'(h)}{h^2}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)-\xi^2 f''(\xi)}{\xi^2}.$$

- 设在区间 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\geq\frac{1}{a}$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上存在最大值 $M$，并且满足：

  $$f(0)+f(a)=a.$$

  试证：

  $$M\geq\frac{5}{8}a.$$

- 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 为 $n$ 个不同的实数，$f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上有 $n$ 阶导数，且 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$。证明：对于 $c\in[a_1,a_n]$，存在 $\xi\in(a_1,a_n)$ 使得：

  $$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

- 设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，重定义 $f(x)=0$，设

  $$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

  ，试求 $F'(0)$。