不定积分与定积分

倪晟翔

2024-12-5

目录

1 不定积分 **1**

1.1 定义 1

1.2 基本积分表 1

1.3 换元积分与分部积分 1

1.4 几类特殊的不定积分方法 2

2 定积分 **3**

2.1 定义 3

2.2 积分中值定理 4

2.3 变限积分 4

2.4 定积分中的换元积分与分部积分 5

2.5 定积分应用 5

2.6 * 积分不等式 6

2.7 * 几类积分技巧 7

1 不定积分

1.1 定义

对于函数 f, 若存在函数 F, 使得 $F' = f$, 则称 F 是 f 的一个不定积分（原函数）。

1.2 基本积分表

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
$$\int \alpha^x \mathrm{d}x = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + C(\alpha > 0)$$
$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$
$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$
$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln(|\cos x|) + C$$
$$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln(|\sin x|) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

1.3 换元积分与分部积分

- **换元积分法：**

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)$$

例题 1.1

---

1. $\int \tan x \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
4. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x, (a > 0)$

- **分部积分法：**

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

例题 1.2

1. $\int \ln x \mathrm{d}x$
2. $\int xe^x \mathrm{d}x$
3. $\int x\sin x \mathrm{d}x$
4. $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$

1.4 几类特殊的不定积分方法

1. 有理函数：有理分式拆分
2. 有理三角函数："万能公式"

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}, \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

3. 某些无理根式：换元积分（直接换元、欧拉换元）

$$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm t$$

4. * 切比雪夫定理：
   二项微式的积分
   $$\int x^m(a+bx^n)^p \mathrm{d}x \ (m,n,p \in \mathbb{Q}; a,b \in \mathbb{R})$$
   仅在以下三种情况可化为有理函数积分：
   (a) p 为整数：令 $x = t^N$, N 为 m,n 公分母;
   (b) $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数：令 $a+bx^n = t^N$, N 为 p 的分母;
   (c) $\dfrac{m+1}{n}+p$ 为整数：令 $ax^{-n}+b = t^N$, N 为 m,n 公分母.

例题 1.3

1. $\int \frac{x+2}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\mathrm{d}x$

2 定积分

2.1 定义

设 $f(x), x \in [a,b]$, $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区间 $[a,b]$ 的一个划分, 记 $S_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, 当 $\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时, 如果极限 $\lim_{\lambda\to 0} S_n$ 存在, 且与区间的划分方式、ξ_i 的取法无关, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 并将极限记为:

$$\lim_{\lambda\to 0} S_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

应用：某些极限的计算

例题 2.1

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$

2.2 积分中值定理

第一中值定理: 若函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 且 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则 $\exists\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

第二中值定理: 若函数 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 f 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $\exists\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

例题 2.2

---

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x =$ ______
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x =$ ______$(\forall p\in\mathbb{N})$
3. 设 $f\in C^1[0,1]$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f(\frac{i}{n})\right| = \frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$

2.3 变限积分

设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 令 $x\in[a,b]$, 则称

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是变限积分函数.

变限积分函数的导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right] = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

例题 2.3

1.$\Phi(x)=\int_a^x tf(x-t)\mathrm{d}t, \dfrac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}=$ ______

2.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan x\mathrm{d}x}{x^2}=$ ______

2.4 定积分中的换元积分与分部积分

- **换元积分法:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)$$

- **分部积分法:**

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$$

例题 2.4

1. $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. $\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

2.5 定积分应用

- **曲线弧长:** 设参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in[a,b]$$

决定光滑简单平面曲线 C, 记 $\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)}\mathrm{d}t$ 是曲线 C 的弧微分.

则曲线弧长可记为:

$$L=\int_\beta^\alpha \mathrm{d}s=\int_\beta^\alpha \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)}\mathrm{d}t$$

若曲线以 $y = f(x), x \in [a, b]$ 形式表达, 则曲线弧长可记为

$$L = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{1 + f'(t)} \mathrm{d}t$$

例题 2.5

设 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \tan x \mathrm{d}x$

2.6 * 积分不等式

Young 不等式: 设 $c > 0$, 函数 f 在 $[0, c]$ 上严格递增且连续, $a \in [0, c], b \in [0, f(c)]$, 则

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \geqslant ab$$

Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x \int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x$$

Holder 不等式: 设 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 函数 f, g 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 则

$$\left[\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}} \geqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x$$

Minkowski 不等式:

$$\left[\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$

例题 2.6

1. 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

2. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 证明: $1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$

3. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, 求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 $I = \int_0^1 (1+x^2)f(x)\mathrm{d}x$ 取得最小值.

2.7 * 几类积分技巧

- **区间再现:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

例题 2.7

$\int_0^{\pi} x\sin^9 x\mathrm{d}x$

- **对称性:**

例题 2.8

1. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{\alpha} x}\mathrm{d}x(\alpha \in \mathbb{R})$

- **复数化:**

例题 2.9

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\mathrm{d}x$$

- **华里士公式:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & ,n\text{为偶数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n\text{为奇数} \end{cases}$$

例题 2.10

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$