多元函数微分学

春夏学期辅学计划

May 5, 2025

1 多元函数的极限和连续

1.1 多元函数的极限

定义1.1. 设$D \subseteq \mathbb{R}^n$，映射$f : D \to \mathbb{R}$称为n元函数，记为：

$$z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{x} \in D$$

特别地，二元函数$z = f(x, y)$，$(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$。

1.2 累次极限和重极限

定义1.2 (重极限)**.** 设$\boldsymbol{x}_0$是D的聚点，若$\exists A \in \mathbb{R}$满足：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in D \cap U^\circ(\boldsymbol{x}_0; \delta),\ |f(\boldsymbol{x}) - A| < \varepsilon$$

则称$\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A$。

定义1.3 (累次极限)**.** 设$E_x, E_y \subseteq \mathbb{R}$，定义：

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = L \iff \begin{cases} \forall y \in E_y \setminus \{y_0\},\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y) \\ \lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = L \end{cases}$$

类似定义另一顺序的累次极限。

定理1.1 (极限关系)**.** 若重极限$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$与累次极限$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$均存在，则二者相等。

推论1.1.1. 当重极限与两个累次极限均存在时，三者相等。

推论1.1.2. 若两个累次极限存在但不相等，则重极限不存在。

练习1.1. 设$f(x,y)$ 在原点$\boldsymbol{O}$ 的某邻域内有定义，则下面命题不正确的是：

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 有可能三者恰有两个存在。

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 有可能三者恰有一个存在。

C. 若$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 都存在，则它们必然相等。

D. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 都存在，则它们必然相等。

1.3 多元函数的连续性

定义1.4 (连续性)**.** 设$D \subseteq \mathbb{R}^n$为开集，$\boldsymbol{x}_0 \in D$，若

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

则称f在$\boldsymbol{x}_0$处连续。若f在D每点连续，则称$f \in C(D)$。

定理1.2 (有界闭集上连续函数的性质)**.** 设$D \subseteq \mathbb{R}^n$为有界闭集，$f \in C(D)$，则：

1. **有界性**：$\exists M > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in D,\ |f(\boldsymbol{x})| \le M$

2. **最值定理**：$\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$使得

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \inf_D f, \quad f(\boldsymbol{x}_2) = \sup_D f$$

3. **介值定理**（D道路连通时）：

$$\forall \eta \in [\min f(D), \max f(D)],\ \exists \boldsymbol{\xi} \in D,\ f(\boldsymbol{\xi}) = \eta$$

2 多元函数微分学

2.1 偏导数与全微分

定义2.1 (偏导数)**.** 设$z = f(x, y)$在(x_0, y_0)某邻域有定义，若极限

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称为f在(x_0, y_0)对x的偏导数。类似定义f'_y。

定义2.2 (全微分)**.** 若存在$A, B \in \mathbb{R}$使得

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

则称f在(x_0, y_0)可微，全微分为$dz = Adx + Bdy$。

定理2.1 (可微性条件)**.**

1. 可微$\Rightarrow$ 连续且偏导存在
2. 偏导连续$\Rightarrow$ 可微
3. 充要条件：

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta z - (f'_x \Delta x + f'_y \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

2.2 微分法则

定理2.2 (链式法则)**.** 设$z = f(u, v)$，$u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$，当f可微且u, v可偏导时：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

定理2.3 (一阶微分形式不变性)**.** 无论u, v是自变量还是中间变量，微分形式：

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$$

恒成立。

练习2.1.

设$f(x,y)=\begin{cases} y\cdot\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，则下述结论不正确的有*()*。

单选题*(10分)*

A. f在$(0,0)$处可求偏导。

B. f在$(0,0)$处可微。

C. f在$(0,0)$处连续。

D. f在$(0,0)$处不可微。

练习2.2. 设$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}\cdot\tan(x^2+y^2), & (x,y)\in O((0,0),1)\backslash\{(0,0)\} \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，则$df|_{(0,0)}=$ ( )。

单选题

A. $-dx-dy$

B. $dx-dy$

C. $-dx+dy$

D. $dx+dy$

练习2.3. 设二元函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$ 上处处可微。已知$f(1,2)=2$，$f_1'(1,2)=3$，$f_2'(1,2)=4$。令$\varphi(t)=f(t,f(t,2t))$，则$\varphi'(1)=($ $)$。

单选题

A. 47

B. 11

C. 23

D. 其余三个选项均不正确

练习2.4. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0) 的邻域$O\left((x_0,y_0),1\right)$ 内有定义，则下述正确的有*()*。

多选题

A. 若f在(x_0,y_0) 处可微，则f在(x_0,y_0) 处连续。

B. 若f在(x_0,y_0) 处可微，则f在(x_0,y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在。

C. 若f在(x_0,y_0) 处可微，且在$O\left((x_0,y_0),1\right)$ 上每点处关于x 可求偏导，则$\frac{\partial f}{\partial x}$在$(x_0,y_0)$ 处连续。
D. 若f在(x_0,y_0) 处可微，则f在(x_0,y_0) 处可求偏导。

练习2.5. 定义二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^p\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明：

(1) 当$p>0$ 时，f 在点$(0,0)$ 处连续；

(2) 当$p>1$ 时，f 在点$(0,0)$ 处可微；

(3) 当$p>2$ 时，f 在点$(0,0)$ 处的偏导数$f_x(x,y)$ 和$f_y(x,y)$ 连续。

2.3 高阶微分

定义2.3 (高阶偏导)**.** 二阶偏导数定义为：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

当混合偏导连续时，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$。

定理2.4 (高阶微分). k阶微分形式为：

$$d^k z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^k f$$

2.4 方向导数与梯度

定义2.4 (方向导数). 沿单位向量$\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$的方向导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \rho\boldsymbol{l}) - f(\boldsymbol{x})}{\rho}$$

当f可微时：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{l} = f'_x \cos\alpha + f'_y \cos\beta$$

定义2.5 (梯度). 梯度向量：

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

方向导数最大的方向即为梯度方向，最大值为$\|\nabla f\|$。

练习2.6. 设$z = f(x, y)$ 在$(1, 2)$处有一阶连续偏导数，且沿$\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (4, -3)$在$(1, 2)$处的方向导数为$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 18$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = -1$，则$z = f(x, y)$ 在$(1, 2)$处的全微分为*()*。
单选题
A. $dz = 2dx + 3dy$
B. $dz = 15dx + 10dy$
C. $dz = 18dx - dy$
D. $dz = 10dx + 15dy$

练习2.7. 设函数$f(x,\, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$证明：

(1) 在点(0, 0) 处沿任意方向的方向导数存在；

(2) 在点(0, 0) 处不可微。

2.5 极值理论

定理2.5 (极值必要条件). 若f在P_0处可偏导且取极值，则$\nabla f(P_0)=0$。

定理2.6 (极值充分条件). 设f在P_0处二阶连续可微，$\nabla f(P_0)=0$，考察$Hessian$矩阵：

$$H=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

- H正定$\Rightarrow$ 极小值
- H负定$\Rightarrow$ 极大值
- H不定$\Rightarrow$ 鞍点

练习2.8. 设函数$f(x,y)$ 在点$P(1,-2)$ 处连续，且满足

$$f(x,y)=5+x-y+x^2+4(x-1)(y+2)+(y+2)^2+o\left((x-1)^2+(y+2)^2\right) \quad (x\to 1, y\to -2)$$

则下列结论正确的有*()*。
多选题*(10分)*
A. $f(x,y)$在$(1,-2)$处取到极值。
B. $f'_x(1,-2)=1$。
C. $df|_{(1,-2)}=3dx-dy$。
D. 曲面$z=f(x,y)$ 在$(1,-2)$处的切平面方程为$z=3x-y+4$。

练习2.9. 设函数$z=z(x,y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 上处处存在所有连续的二阶偏导函数，且在点$(0,0)$处取极大值，则必有*()*。
单选题
A. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)>0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)<0$。
B. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\le 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\le 0$。
C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)<0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)>0$。
D. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\ge 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\ge 0$。

练习2.10. 二元函数$z = f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ 在$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ 上的最大值为*()*。
单选题
A. $\frac{5}{4}$
B. 1
C. $\frac{3}{4}$
D. $\frac{1}{4}$

练习2.11. 求函数$f(x,\, y,\, z) = x^4 + y^4 + z^4$在约束条件$xyz = 1$ 下的极值。

练习2.12. 设D 是平面上的一个有界闭区域，D° 是D 的内部，二元函数$z = z(x,y)$ 在D 上连续，在D 上有所有的连续二阶偏导函数，且满足$\forall (x,y) \in D^\circ$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = 0,$$

证明：函数$z(x,y)$ 在D 上的最值只能在D 的边界∂D 上取到。

2.6 隐函数定理

定理2.7 (隐函数存在唯一性定理)**.** 设函数$F(x,y)$ 满足下列条件:

1. 在以(x_0, y_0) 为内点的某一区域$D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续;

2. $F(x_0, y_0) = 0$（通常称为初始条件）；

3. 在D 上存在关于y 的连续偏导数$F'_y(x, y)$；

4. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$。

则在点(x_0, y_0) 的某邻域$U \subset D$ 内，方程$F(x, y) = 0$ 唯一地确定了一个定义在某区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内的函数$y = f(x)$，使得

1. $f(x_0) = y_0$，且当且仅当$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，$F(x, f(x)) \equiv 0$;

2. $f(x)$ 在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内连续。

练习2.13. 求函数

$$\omega = \arcsin x + y + 5ze^{u(x,y)}$$

在点$P_0(0, 0, 2)$ 处的梯度$\operatorname{grad}\omega(P_0)$，其中$u(x, y)$ 是由方程

$$yu^3 - xu^4 + u^5 = 1$$

所确定的隐函数。

练习2.14. 设$z = z(x, y)$ 是由方程

$$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$$

所确定的函数，求$z = z(x, y)$ 的极值点和极值。