多元函数积分学（二重积分）

授课人：朱家骏

2025 年 5 月 16 日

（一）重要定理与公式

1. 在直角坐标系中计算

定义 6.1 若任意一条垂直 x 轴的直线 $x = x_0$ 至多与区域 D 的边界交于两点（垂直 x 的边界除外），则称 D 为 x 型区域，且 x 型区域 D 一定可表示为平面点集：

$$D = \{(x, y) : j_1(x) \le y \le j_2(x), a \le x \le b\},$$

即曲线 $y = j_1(x)$（下曲线），$y = j_2(x)$（上曲线）及直线 $x = a$, $x = b$ 所围成的区域. 此时,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

定义 6.2 若任意一条垂直 y 轴的直线 $y = y_0$ 至多与区域的边界交于两点（垂直于 y 轴的边界除外），则称 D 为 y 型区域，且 y 型区域一定可表示为平面点集：

$$D = \{(x, y) : y_1(y) \le x \le y_2(y), c \le y \le d\},$$

即曲线 $x = y_1(y)$（左曲线），$x = y_2(y)$（右曲线）及直线 $y = c$, $y = d$ 所围成. 此时,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

许多常见的区域都可分割成有限个无公共内点的 x 型区域或 y 型区域，利用二重积分的可加性知，即 $D = D_1 + D_2 + D_3$，且 D_1, D_2, D_3 或者为 x 型区域或者为 y 型区域，则

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy + \iint_{D_3} f(x, y)\, dxdy.$$

2. 在极坐标系下的计算

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$\iint_D f(x, y)\, ds = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta.$$

当积分区域是圆域或圆域一部分时,可用极坐标变换,若被积函数中含有 x^2+y^2,更要用极坐标变换.

定义 6.3 若任意射线 $\theta=\theta_0$ 与区域 D 的边界至多交于两点（边界是射线段除外），则称 D 为 θ 型区域，且 θ 型区域 D 可表示为平面点集：

$$\{(r,\theta): r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta), \alpha\le\theta\le\beta\},$$

即由曲线 $r=r_1(\theta)$（下曲线），$r=r_2(\theta)$（上曲线），及射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 围成的区域. 此时,

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta\left(\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

(1) 若极点 O 在区域外部，此时区域 D 可表示为 $r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta\left(\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

(2) 若极点 O 在区域 D 边界上，且边界曲线 $r=r(\theta)$ 向外凸，此时区域 D 可表示为 $D: 0\le r\le r(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

(3) 若极点 O 在区域 D 的内部，此时区域 D 可表示为 $D: 0\le r\le r(\theta)$, $0\le\theta\le 2\pi$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

注：在区域 θ 的变化区间 $[\alpha,\beta]$ 内，过极点作射线，此射线穿过区域 D，穿入点所在的曲线 $r=r_1(\theta)$ 为下限（下曲线），穿出点所在的曲线 $r=r_2(\theta)$ 为上限（上曲线）.

有时也可以把 D 表示为 r 型区域：

$$q_1(r)\le\theta\le q_2(r), r_1\le r\le r_2,$$

即由曲线 $\theta=q_1(r)$, $\theta=q_2(r)$ 与圆 $r=r_1$, $r=r_2$ 所围成的区域. 此时,

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_{r_1}^{r_2}\left(\int_{q_1(r)}^{q_2(r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,d\theta\right)dr.$$

特别地，若区域 D 为：$\alpha\le\theta\le\beta$, $r_1\le r\le r_2$，其中 α,β,r_1,r_2 均为常数，则

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta\left(\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta=\int_{r_1}^{r_2}\left(\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,d\theta\right)dr.$$

(1) 若 D 是由曲线 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的区域. 经极坐标变换, 方程为 $r=R$, 属于情形 (3)，有

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

(2) 若 D 是曲线 $x^2+y^2=2xR$ 所围成的区域. 经极坐标变换，方程为 $r=2R\cos\theta$，属于情形 (2)，由 $D:0\le r\le 2R\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，知

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2R\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

(3) 若 D 是曲线 $x^2+y^2=2Ry$ 所围成的区域. 经极坐标变换，曲线方程为 $r=2R\sin\theta$，属于情形 (2)，由 $D:0\le r\le 2R\sin\theta$, $0\le\theta\le\pi$，知

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2R\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

3. 对称区域上二重积分的性质

设 D 为平面区域，若

(1) 若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\begin{cases}0, & \text{当}f(x,-y)=-f(x,y),\text{即}f(x,y)\text{ 是奇函数},\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,ds, & \text{当}f(x,-y)=f(x,y),\text{即}f(x,y)\text{ 是偶函数}.\end{cases}$$

(2) 若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\begin{cases}0, & \text{当}f(-x,y)=-f(x,y),\text{即}f(x,y)\text{ 是奇函数},\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,ds, & \text{当}f(-x,y)=f(x,y),\text{即}f(x,y)\text{ 是偶函数}.\end{cases}$$

(3) 若 $D=D_1+D_2$，且 D_1,D_2 关于原点对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,ds=\begin{cases}0, & \text{当}f(-x,-y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,ds, & \text{当}f(-x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

（二）练习题

1. 二重积分的概念与性质

(1) 二重积分的概念

i 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(u,v)\,du\,dv$，其中 D 是由 $y=0$, $y=x$, $x=1$ 围成的区域，求 $f(x,y)$.

ii 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^4}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n i^2\sin\frac{j\pi}{2n}$.

(2) 二重积分的性质

i 比较积分 $\iint_D \ln(x+y)\,d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2\,d\sigma$ 的大小，其中积分区域 D 是三角形闭区域，3 个顶点分别为 $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

ii 比较积分 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4}\,d\sigma$, $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}}\,d\sigma$, $I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}\,d\sigma$ 的大小，其中积分区域 D 是由 $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2$ 围成的闭区域.

iii 设 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 2, & 0 \leqslant x \leqslant 3, 1 < y \leqslant 2 \\ 3, & 0 \leqslant x \leqslant 3, 2 < y \leqslant 3 \end{cases}$，计算 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$，其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

iv 设区域 D 是由 $y=0$, $y=x$, $x=1$ 围成的区域，求函数 $f(x,y)=xy$ 在区域 D 上的平均值.

v 求极限 $\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y)\,dx\,dy$, 其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant r^2\}$.

vi 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，$f(0,0)=1$，$g(x)$ 有连续的导数，且 $g(0)=0$, $g'(0)=3$，求极限 $\lim_{r\to 0^+} \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{g(r^2)}$ 的值，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant r^2\}$.

vii 设积分区域 D 是由直线 $x=-1$, $x=1$, $y=-2$, $y=2$ 围成的闭区域，则 $\iint_D (x^2 \tan y + \sin x^3)\,d\sigma$.

viii 设积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 4, x \leqslant 0, y \leqslant 0\}$，$f(x)$ 是区域 D 上的正值连续函数，a, b 为常数，计算 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\,d\sigma$.

ix 计算二重积分 $\iint_D (x^2+2y)\,dx\,dy$, 其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

2. 二重积分的计算方法

(1) 交换积分次序

这种类型的题目可以按照如下步骤求解.

第 1 步： 根据已知的积分写出积分区域 D 的坐标描述.

第 2 步： 画出区域 D 的图像.

第 3 步： 根据图像，写出 D 的另一种坐标描述. 若已知将 D 视为 X 型区域，则将其视为 Y 型区域，反之亦然.

第 4 步： 根据坐标描述写出新的积分次序.

练习:

i 已知 $I=\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$，交换其积分次序.

ii 已知 $I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$，交换其积分次序.

iii 已知 $I=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$，交换其积分次序.

iv 已知 $I=\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$，交换其积分次序.

v 已知 $I=\int_0^\pi dx\int_{-\sin x/2}^{\sin x} f(x,y)dy$，交换其积分次序.

vi 已知 $I=\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$，交换其积分次序.

vii 已知 $I=\int_1^2 dx\int_x^{x^2} f(x,y)dy+\int_2^8 dx\int_x^8 f(x,y)dy$，交换其积分次序.

viii 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，求 $F'(3)$.

(2) 平面直角坐标系下二重积分的计算

平面直角坐标系下的二重积分 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ 通常要化为两次定积分来进行计算, 所以确定两次积分的积分限和选择恰当的积分次序是非常重要的, 这两者都取决于积分区域 D 是 X 型区域还是 Y 型区域.

选择积分次序一般遵循以下两个原则:

1) 积分区域尽量避免分块;

2) 被积函数第一次积分易得出结果.

一般来说，二重积分的计算按照如下步骤进行.

第 1 步: 画出积分区域 D 的图像.

第 2 步: 写出区域 D 的坐标描述，从而确定两次积分的积分次序和积分限.

第 3 步: 计算两次定积分.

平面直角坐标系下二重积分的计算通常有以下几种情形.

情形 1: 积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$，被积函数 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$，此时

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b f_1(x)\,dx\cdot\int_c^d f_2(y)\,dy.$$

情形 2: 积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$，此时

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

情形 3: 积分区域 D 是 X 型区域，即 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$，此时

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy.$$

情形 4: 积分区域 D 是 Y 型区域，即 $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$，此时

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\,dx.$$

情形 5: 当积分区域 D 既不是 X 型区域也不是 Y 型区域时，我们需用平行于 x 轴或 y 轴的直线将区域 D 分割，使每个小区域是 X 型区域或 Y 型区域，然后利用积分的区域可加性进行计算.

练习:

i 计算二重积分 $\iint_D(x+y)\,dx\,dy$，其中积分区域 D 是由 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ 围成的矩形区域.

ii 计算二重积分 $\iint_D xe^{xy}\,dx\,dy$，其中积分区域 D 是由 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ 围成的矩形区域.

iii 计算二重积分 $\iint_D xy\,dx\,dy$，其中积分区域 D 是由 $x=2$, $y=1$, $y=x$ 围成的区域.

iv 计算二重积分 $\iint_D x\sqrt{y}\,dx\,dy$，其中积分区域 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 围成的区域.

v 计算二重积分 $\iint_D(3x+2y)\,dx\,dy$，其中积分区域 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 围成的区域.

vi 计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$，其中积分区域 D 是由 $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $y=x$, $y=x^2$ 围成的区域.

vii 计算二重积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1(y+xe^{y^2})\,dy$.

viii 计算二重积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\,dy$.

ix 计算二重积分 $I=\int_0^{\ln 2}dy\int_{e^y}^2\frac{e^{xy}}{x^x-1}\,dx$.

x 已知 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=-1$, $f(2)=-\frac{1}{2}$. 计算二重积分 $I=\int_0^2 dx\int_0^x\sqrt{(2-x)(2-y)}f'''(y)\,dy$.

xi 已知 $f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，且 $a>0$. 计算二重积分 $I=\iint_D f(x)g(y-x)dxdy$，其中积分区域 D 表示整个坐标面.

xii 已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，计算二重积分 $I=\iint_D f(x,y)dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

xiii 计算二重积分 $\iint_D |y-x^2|dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

xiv 计算二重积分 $\iint_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

xv 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中积分区域 D 是由 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ 围成的矩形区域.

xvi 计算二重积分 $\iint_D(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\leqslant 1\}$.

(3) 利用极坐标系计算二重积分

当积分区域 D 为圆域或圆域的一部分，或扇形区域，或区域 D 的边界方程用极坐标表示极为简单，或被积函数为 $f(x^2+y^2)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 等形式时，通常利用极坐标计算二重积分比较简单.

极坐标和平面直角坐标之间的关系要牢记. 设点 P 在平面直角坐标系和极坐标系下的坐标分别为 $P(x,y)$ 和 $P(\rho,\theta)$，则

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \tan\theta=\frac{y}{x}\end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases} \quad \mathrm{dxdy}=\rho\, d\rho\, d\theta.$$

从而

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta.$$

极坐标系下二重积分的计算步骤与平面直角坐标系下二重积分的计算步骤完全类似，不再赘述.

练习:

i 计算二重积分 $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$.

ii 计算二重积分 $\iint_D(x^2-y)dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$.

ii. 计算二重积分 $\iint_D x^2\ln(x^2+y^2)dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant e^2\}$.

iv 设平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，计算 $\iint_D \frac{x\cos(x^2+y^2)}{x+y}dxdy$.

v 计算二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中积分区域 D 是由直线 $x=1$, $y=0$ 及 $y=x$ 围成的区域.

vi 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中积分区域 D 是由直线 $x=1, y=0$ 及 $y=x$ 围成的区域.

vii 计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

viii 计算二重积分 $\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$，其中积分区域 D 是由直线 $y=0$, $y=x$ 及曲线 $y=\sqrt{4x-x^2}$, $y=\sqrt{9x-x^2}$ 围成的区域.

ix. 计算二重积分 $\iint_D(x-y)dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

x. 计算二重积分 $\iint_D(x+y^2)dxdy$，其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant x\}$.

xi. 设闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant y, x\geqslant 0\}$，$f(x,y)$ 为闭区域 D 上的连续函数，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$，求 $f(x,y)$.

(4) 二重积分的换元法

定理：设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 内连续，若变换

$$T: x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D，且满足

1) $x(u,v), y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数.

2) D' 上雅可比行列式 $J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$.

3) 变换 T 是 D' 与 D 之间的一个一一对应，则

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv.$$

练习：

i. 做适当的变换，计算二重积分 $\iint_D(x+y)\sin(x-y)\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant\pi, 0\leqslant x-y\leqslant\pi\}$.

ii. 计算二重积分 $\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

iii. 做适当的变换，计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{x}{x+y}}\,dx\,dy$，其中 $D = \{(x,y) \mid x+y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

iv. 设区域 D 是由曲线 $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3 = 15$ 围成的第一象限中的闭区域，求 D 的面积.

v. 证明 $\iint_D f(x+y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} f(u)\,du$, 闭区域 $D = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leqslant 1\}$.