微积分 II (H) 期末复习

倪晟翔

2025 年 6 月 6 日

1 向量代数与空间解析几何

1.1 向量运算

1.1.1 基本运算

- **点积**: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- **叉积**: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$, 方向垂直原向量
- **混合积**: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 表示平行六面体体积

例题 1.1 混合积应用

证明矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件是 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

例题 1.2 混合积应用

已知矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两成 60° 角, 且 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3$, 求 $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$.

1.1.2 一些恒等式

- 拉格朗日恒等式：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$
- 二重叉积公式：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
- 标量四重积：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c}&\vec{a}\cdot\vec{d}\\\vec{b}\cdot\vec{c}&\vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$

1.2 空间几何

1.2.1 平面方程

- **一般式**: $Ax+By+Cz+D=0$, 法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

- **点法式**: 已知点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 和法向量 $\vec{n}$, 则 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
- **三点式**: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$

1.2.2 直线表示

- **对称式**: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$, 方向向量 $\vec{s} = (a, b, c)$
- **参数式**: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$
- **交面式**: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

1.2.3 几何关系判定

- **平行条件**:
  - 平面平行：法向量共线 $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$
  - 直线平行：方向向量共线 $\vec{s}_1 = k\vec{s}_2$
- **垂直条件**:
  - 平面垂直：法向量正交 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
  - 直线垂直：方向向量正交 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$
- **线面夹角**: $\sin\theta = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

1.2.4 曲面与曲线

- **柱面**: 准线为 $C : \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, 母线平行于 z 轴时方程为 $f(x, y) = 0$
- **旋转曲面**: 曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转得 $f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$
- **二次曲面**: 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 双曲面, 抛物面等标准形式

1.2.5 切平面与切线

- **曲面切平面**：对曲面 $F(x, y, z) = 0$, 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为：

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

- **参数曲面切平面**：对 $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$

- **空间曲线切线**：对参数曲线 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 在 t_0 点的切线方程为：

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

例题 1.3 切平面方程

求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 3$ 上某点处的切平面方程, 使之同时垂直于平面 $z = 0$ 和 $x + y - z + 1 = 0$.

1.2.6 距离公式

- **点到平面距离**：点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离：

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- **点到直线距离**：设直线方向向量 $\vec{s}$, 定点 M_0, 则点 M 到直线的距离：

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

例题 1.4 距离计算

求点 $M(-1, -4, 3)$ 到直线

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 2, \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

的距离.

例题 1.5 距离计算

点 $(-1, 1, 4)$ 到直线 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-5}{-1}$ 的距离为_______.

1.3 投影

1.3.1 投影方程

给定空间曲线 $\Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 和目标平面 $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, 其投影曲线求解步骤如下：

1. **建立投影柱面：**

   - 构造包含 Γ 且母线方向平行于平面 π 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$ 的柱面
   - 从原方程组中消去与 $\vec{n}$ 正交的变量组合

2. **消元：**

   - 若 $C \neq 0$, 从平面方程解出 $z = -\dfrac{Ax + By + D}{C}$
   - 将 z 表达式代入曲线方程, 得到关于 x, y 的方程 $H(x, y) = 0$

3. **联立：**

$$\text{投影曲线} = \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

1.3.2 特殊情形处理

- **坐标平面投影：**当目标平面为 $z = 0$ 时, 直接消去 z 即可
- **柱面投影：**若曲线本身是柱面与平面的交线, 投影即为柱面准线
- **参数曲线投影：**对于参数式 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 需解平面方程得到参数约束

例题 1.6 空间曲线投影

求空间曲线 $C: \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases}$ 在平面 $x - 2y + 2z = 10$ 上的投影曲线方程

1.3.3 特殊位置关系

- **两平面夹角：**$\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$
- **直线与平面夹角：**$\sin\phi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$ （ϕ 为夹角余角）
- **异面直线距离：**设直线方向向量 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$, 点 M_1, M_2 分别在上, 则距离：

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

2 级数理论

2.1 数项级数判别法

- **Cauchy 准则：**$\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ 使得 $\forall m > n \geq N$ 有 $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛

- **比较判别法**：若 $|a_n| \le b_n$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛
- **比值判别法**：$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ 时绝对收敛
- **根值判别法**：$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ 时绝对收敛
- **积分判别法**：对正项递减函数 $f(x)$，$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
- **Leibniz 判别法**：交错级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，若 $a_n \to 0$
- **Abel 判别法**：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收敛，若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\{b_n\}$ 单调有界
- **Dirichlet 判别法**：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收敛，若 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le M$ 且 $b_n \to 0$

例题 2.1 Cauchy 判别法

设 $\{a_n\}$ 为单调减少的正数列：

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \rho$，证明：

- 当 $\rho < \frac{1}{2}$ 时级数收敛
- 当 $\rho > \frac{1}{2}$ 时级数发散

2.2 幂级数

- **收敛半径**：$R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$（Cauchy-Hadamard 公式）
- **比值法**：若 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$，则 $R = \frac{1}{L}$
- **性质**：
  - 在 $(-R, R)$ 内绝对收敛，$|x| > R$ 发散
  - 内闭一致收敛，可逐项求导/积分

例题 2.2 收敛半径计算

设 $a_n = \dfrac{3\cdot 7\cdots(4n-5)(4n-1)}{5\cdot 9\cdots(4n-3)(4n+1)}$, $n=1,2,\cdots$, 求幂级数 $x+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{4n+1}$ 的收敛半径和收敛域.

2.3 一致收敛 *

- **Weierstrass M-判别法：** 若 $|u_n(x)| \le M_n$ 且 $\sum M_n$ 收敛, 则 $\sum u_n(x)$ 一致收敛
- **连续性定理：** 若 $u_n(x) \in C(D)$ 且 $\sum u_n(x)$ 一致收敛, 则和函数 $S(x) \in C(D)$
- **逐项积分：** $\sum \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\mathrm{d}x$
- **逐项求导：** 若 $\sum u_n'(x)$ 一致收敛, 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum u_n(x) = \sum u_n'(x)$

例题 2.3 一致收敛判定

证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

2.4 傅里叶级数

- **系数公式**:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

- **收敛定理**: 若 $f(x)$ 分段光滑, 则傅里叶级数收敛于 $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$
- **奇偶延拓**: 奇函数仅含正弦项, 偶函数仅含余弦项
- **Parseval 等式**: $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

例题 2.4 傅里叶展开

设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$ $f(x)$ 的 Fourier 级数展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

其和函数为 $S(x)$, 试确定 a_0 及 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的值.

3 多元函数微分学

3.1 极限与连续性

- 连续定义：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$
- 累次极限存在 $\nRightarrow$ 二重极限存在
- 极坐标：令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 当 $r\to 0$ 时与 θ 无关

例题 3.1 二重极限

判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 是否存在.

3.2 偏导数与全微分

- 可微的充分条件：偏导数连续
- 微分公式：$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

例题 3.2 可微性

设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

1. 求 $f'_x(0,0)$ 及 $f'_y(0,0)$.
2. 证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

3.3 链式法则与变量替换

- 极坐标变换：$\dfrac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$
- 拉普拉斯算子：$\Delta u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$

例题 3.3 复合函数求导

设 $z=f(u,x,y)$, $u=x\arctan y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

3.4 方向导数

- 定义：函数 f 在点 P_0 沿方向 $\vec{u}$（单位向量）的方向导数：

$$D_{\vec{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u}$$

- 计算公式：若 $\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则

$$D_{\vec{u}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

例题 3.4 方向导数

求函数 $f(x,y,z) = x^3y + y^2z + zx$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $n = (1,0,1)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}$

3.5 隐函数定理

- 存在条件：$F(x_0,y_0,z_0) = 0$ 且 $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$
- 微分公式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$
- 雅可比行列式：$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$

例题 3.5 隐函数求导

由方程 $F(x^2 - z^2, y^2 + z^2) = 0$ 确定 $z = z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

3.6 极值问题

- 无条件极值：Hessian 矩阵 $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
  - H 正定，即 $\det(H) > 0$ 且 $f_{xx} > 0$：极小值
  - H 负定，即 $\det(H) > 0$ 且 $f_{xx} < 0$：极大值
  - H 不定，即 $\det(H) = 0$：鞍点
- 条件极值：拉格朗日乘数法 $\nabla\mathcal{L} = 0$

例题 3.6 条件极值

设某类三角形的三条边 a,b,c 满足 $a = c$ 及 $a^3 + b^3 + c^3 = 3$，求此类三角形面积最大值.

4 多元函数积分学

4.1 重积分基础

- 二重积分定义： $\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$
- 累次积分:若 $f(x,y)$ 在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 连续, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$

例题 4.1 二重积分

设 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域, 求

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

.

例题 4.2 三重积分

设 V 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围立体, 计算三重积分：

$$\iiint_V |\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

.

例题 4.3 累次积分

计算积分：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_y^1 ye^{z^2}\mathrm{d}z$$

.

4.2 重积分换元法

4.2.1 基本公式

二重积分换元公式：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中雅可比行列式：

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

4.2.2 常见变换

- 极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, J = r$$

- 柱坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}, J = \rho$$

- 球坐标变换

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, J = r^2\sin\theta$$

例题 4.4 坐标变换

计算 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为单位圆域.

4.3 曲线积分与格林公式

- **第一型曲线积分**（标量场）: $\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt$
- **第二型曲线积分**（矢量场）: $\displaystyle\int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$
- **格林公式**:设 D 为有界闭区域, $L=\partial D$ 正向, 则 $\displaystyle\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例题 4.5 第一类曲线积分

设 $y(x)=\int_0^x\sqrt{3+t^4}dt$, l 为平面曲线 $y=y(x)$ 在 $-1\le x\le 1$ 上的弧段, 求曲线积分

$$\int_L (y+|x|^3)\mathrm{d}s.$$

例题 4.6 第二类曲线积分

设 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, L 为从点 $A(0,-\alpha)$ 沿曲线 $x=\cos y$ 到点 $B(0,\alpha)$ 的有向弧段, 计算第二类曲线积分

$$\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

.

例题 4.7 格林公式

已知曲线 $L: x^2+y^2=4$, 求第一类曲线积分 $\oint_L (2x+y)^2 \mathrm{d}s$.

例题 4.8 保守场

验证 $\mathbf{F}=(2xy^3, 1+3x^2y^2)$ 是否保守, 并计算 $\int_L \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

4.4 曲面积分与高斯公式

- **第一型曲面积分:** $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}s = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
- **第二型曲面积分:** $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
- **高斯公式:** 对于空间闭区域 V, ∂V 为外侧, 则 $\oint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathrm{d}V$

例题 4.9 第一型曲面积分

已知曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2\ (0\le z\le 6)$, 求第一类曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{1}{1+4z}\mathrm{d}s$

例题 4.10 第二型曲面积分

设 S 为平面 $x+y+z=2$ 被柱面 $|x|+|y|=1$ 截下的有限部分的上侧.

1. 写出 S 在各坐标平面上的投影区域;
2. 将第二类曲面积分 I 转化为二重积分并完成计算. 其中

$$I=\iint_S (x+y+3z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2x+2y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+2y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

.

例题 4.11 格林函数

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是以光滑曲面 Γ 为边界的有界区域, 函数 $u(x,y,z)$ 与 $v(x,y,z)$ 及它们的一阶偏导数在闭区域 $\Omega\cup\Gamma$ 上连续, 在 Ω 内有二阶连续偏导数, 试利用高斯公式, 证明:

$$\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V = \iint_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)\mathrm{d}s,$$

其中算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\vec{n}$ 是 Γ 上的外法向

4.5 场论初步

- **梯度:** $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

- 散度：$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

- 旋度：$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

- 斯托克斯公式：$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

例题 4.12 基本性质

证明：

- 梯度无旋：$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$
- 旋度无散：$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

例题 4.13 斯托克斯公式

计算曲面积分 $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{F} = (z, x, y)$, 曲面 S 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限部分（$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$）, 方向取上侧

4.6 物理应用

- 质量：$m = \iiint_V \rho(x, y, z) \mathrm{d}v$
- 质心坐标：$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_V x\rho \mathrm{d}v$（其余分量类似）
- 转动惯量：$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho \mathrm{d}v$
- 通量：$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

例题 4.14

某物体在空间直角坐标系下表示为以下有界闭区域

$$V = \left\{ (x, y, z) \middle| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\tan \alpha} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

已知 V 内任一点的密度值等于该点到原点的距离.

1. 求此物体的质量 M.
2. α 取何值时, 此物体的重心位于 $(0, 0, 1)$?