微积分 I(H) 第一次辅学

范围：《微积分》第一章

作者：计科 2406 季诗悦

时间：2025/11/2

ElegantLaTeX Program

We must know. We will know.

目录

第一章 数列极限与函数极限

1.1 一些基本的东西

1.1.1 三角不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

1.1.2 平方和公式和立方和公式、立方差公式和立方和公式

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

1.1.3 反三角函数

表 1.1: 反三角函数定义与性质

名称	常用符号	定义	定义域	值域
反正弦	$y=\arcsin x$	$x=\sin y$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
反余弦	$y=\arccos x$	$x=\cos y$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
反正切	$y=\arctan x$	$x=\tan y$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
反余切	$y=\text{arccot}\, x$	$x=\cot y$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$
反正割	$y=\text{arcsec}\, x$	$x=\sec y$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
反余割	$y=\text{arccsc}\, x$	$x=\csc y$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

1.2 数列极限

定义 1.1 (数列极限的概念)

设 $\{a_n\}$ 为数列，a 为定数，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，使得当 $n>N$ 时，都有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，并记做

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

如果数列 $\{a_n\}$ 没有极限，就称 $\{a_n\}$ 为发散数列。

♣

用定义证明极限

根据 ε 找 N，一般有三种方法：

(1) 等价代换法

(2) 放大法：当 $|x_n-A|<\varepsilon$ 难以直接解出 n 时，将 $|x_n-A|$ 简化、放大为关于 n 的新函数 $H(n)$（即 $|x_n-A|\le H(n)$）。解不等式 $H(n)<\varepsilon$，求得 $n>N(\varepsilon)$，令 $N=N(\varepsilon)$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon$。

(3) 分步法：若 $|x_n-A|$ 特别复杂，先假定 n 已足够大（如大于某数 N_1），此时 $|x_n-A|$ 可简化、放大为 $H(n)$，解 $H(n)<\varepsilon$ 得 $n>N(\varepsilon)$，再令 $N=\max\{N_1,N(\varepsilon)\}$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon$。

例题 1.1 放大法 用 ε-N 方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$。

例题 1.2 分步法 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n}=A$。

补充：Stolz 公式

1. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足以下 3 个条件：

- 1. $\{b_n\}$ 严格递增（即 $b_{n+1}>b_n$ 对所有 n 成立）;
- 2. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$;
- 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$（$L$ 可以是有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$）。

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$。

2. $\dfrac{0}{0}$ 型数列 Stolz 公式

若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足：

- 1. $\{b_n\}$ 严格递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$;
- 2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;
- 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$。

则同样有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=L$。

1.2.1 收敛数列的性质

命题 1.1 (唯一性)

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它的极限唯一。

命题 1.2 (有界性)

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 为有界数列，即存在正数 M，使得对所有正整数 n，都有 $|a_n| \le M$。

命题 1.3 (保号性)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，

1. 若 $a > 0$（或 $a < 0$），则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $a_n > 0$（或 $a_n < 0$）。
2. 若存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$a_n \ge 0$（或 $a_n \le 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $a \ge 0$（或 $a \le 0$）。

命题 1.4 (保不等式性)

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛，且存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，有 $a_n \le b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

命题 1.5 (四则运算性质)

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. 若 $b \ne 0$ 且存在正整数 N，当 $n > N$ 时 $b_n \ne 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

命题 1.6 (夹逼定理（迫敛性）)

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，若存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$a_n \le c_n \le b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$。

1.2.2 数列极限存在的准则

1.2.2.1 夹逼定理

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$，若存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，都有 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$。

例题 1.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 均为正常数。

例题 1.4 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+2n+1} + \dfrac{2}{n^2+2n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+2n+n} \right)$。

例题 1.5 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sin 1} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sin 2} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sin n} \right)$。

例题 1.6 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{\sqrt{n^6+1}+1}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2}+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}+\frac{1}{n}}\right)$。

1.2.2.2 单调有界定理

若数列 $\{a_n\}$ 递增（递减）有上界（下界），则数列 $\{a_n\}$ 收敛，即单调有界数列必有极限。

例题 1.7 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=3$，$2a_{n+1}=a_n+\frac{6}{a_n+1}(n\geq 1)$，(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛；(2) 计算 $\lim_{n\to\infty}a_n$。

递推形式的极限

例题 1.8 已知数列 x_n 满足 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 求证 x_n 极限存在并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$。

例题 1.9 设 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，求 $\lim_{n\to\infty}x_n$。

1.2.2.3 Cauchy 收敛定理

定义 1.2 (柯西列)

一个数列 $\{a_n\}$ 被称为柯西列，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $m,n>N$ 时，有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$。

定理 1.1 (柯西收敛定理)

在实数系中，数列收敛的充分必要条件是它是柯西列。

1.3 函数极限

1.3.1 邻域的分类

表 1.2: 邻域类型及其定义

邻域类型	符号	集合定义	说明
普通邻域	$U(x_0,\delta)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid \lvert x-x_0\rvert<\delta\}$	包含中心点 x_0 的对称区间
去心邻域	$\mathring{U}(x_0,\delta)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid 0<\lvert x-x_0\rvert<\delta\}$	排除中心点 x_0 的对称区间
左邻域	$U_-(x_0,\delta)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x_0-\delta<x<x_0\}$	x_0 左侧的区间，不包含 x_0
右邻域	$U_+(x_0,\delta)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x_0<x<x_0+\delta\}$	x_0 右侧的区间，不包含 x_0

1.3.2 函数极限的概念

我们引入了以下六种极限

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}f(x);\quad (2)\ \lim_{x\to-\infty}f(x);\quad (3)\ \lim_{x\to\infty}f(x);$$
$$(4)\ \lim_{x\to x_0}f(x);\quad (5)\ \lim_{x\to x_0^+}f(x);\quad (6)\ \lim_{x\to x_0^-}f(x).$$

1.3.3 函数极限的定义

定义 1.3 ($x\to+\infty$ 时的极限)

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有定义，A 是一个定数。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $X>a$，使得当 $x>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 x 趋于正无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

♣

定义 1.4 ($x\to-\infty$ 时的极限)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上有定义，A 是一个定数。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $X>|b|$，使得当 $x<-X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 x 趋于负无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

♣

定义 1.5 ($x\to\infty$ 时的极限)

设函数 $f(x)$ 在 $|x|>M\ (M>0)$ 上有定义，A 是一个定数。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $X>M$，使得当 $|x|>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 x 趋于无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

♣

定义 1.6 ($x\to x_0$ 时的极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 内有定义，A 是一个定数。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0\,(\delta<\delta')$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

♣

定义 1.7 ($x \to x_0^+$ 时的右极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域 $(x_0, x_0+\delta')$ 内有定义，A 是一个定数。如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0\,(\delta < \delta')$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称当 x 趋于 x_0^+ 时，$f(x)$ 以 A 为右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

♣

定义 1.8 ($x \to x_0^-$ 时的左极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域 $(x_0-\delta', x_0)$ 内有定义，A 是一个定数。如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0\,(\delta < \delta')$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称当 x 趋于 x_0^- 时，$f(x)$ 以 A 为左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

♣

数列极限是函数极限的一种特殊情况，数列可以看作是定义域为正整数集的函数。它们的相同点在于都描述了一个量随着另一个量的变化而趋近于某个确定值的过程，都具有“趋向性”，并且都满足一些基本性质，如唯一性、保号性、四则运算法则等。不同点在于数列极限中自变量 n 只能取正整数，且 n 趋近于无穷大；而函数极限中自变量 x 可以在实数范围内取值，可以趋近于某个实数 x_0，也可以趋近于正无穷、负无穷或无穷。

1.3.4 两个重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 和 \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

例题 1.10 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$。

例题 1.11 求 $\lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x}{x+1})^{x+2}$

例题 1.12 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

1.3.5 函数极限存在的准则

定理 1.2 (夹逼定理)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta')$，使得对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta')$，都有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=A.$$

♡

定理 1.3 (归结原则（Heine 定理）)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是对任何以 x_0 为极限且含于 $\mathring{U}(x_0)$ 的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在且相等。

♡

定理 1.4 (函数极限不存在的判别法)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，则 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限不存在的充要条件是：

1. 存在 $\{x_n'\},\{x_n''\}\subset\mathring{U}(x_0)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n''=x_0$，但

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=A,\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n'')=B,\quad A\neq B;$$

   或

2. 存在 $\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在。

我们常常用情形 (1) 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在。

♡

1.3.6 等价量替换定理

定理 1.5 (等价量替换定理)

若满足以下条件：

1. $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，$h(x)\sim h_1(x)$（当 $x\to x_0$）；
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}=A$（或 ∞）；

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}=A\ (\text{或 }\infty).$$

♡

常用等价无穷小（当 $x\to 0$ 时）：

- $\ln(1+x)\sim x$
- $e^x-1\sim x$
- $a^x-1\sim x\ln a$（$a>0, a\neq 1$ 为常数）
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$（$\alpha\neq 0$ 为常数）
- $\arcsin x\sim x$
- $\arctan x\sim x$

1.3.7 函数极限的计算技巧

1.3.7.1 取对数

例题 1.13 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$。

1.3.7.2 有理化

例题 1.14 计算极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+6x-1}+x+3\right)$。

1.3.7.3 等价量替换定理

例题 1.15 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}-x^3\sin\dfrac{1}{x}}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\cos x}$。

例题 1.16 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}(e^{2x}-\arctan x)^{\csc x}$。

1.3.7.4 L'Hospital 法则

1.3.7.5 利用 Taylor 公式

1.3.7.6 利用积分定义

1.4 函数的连续性

1.4.1 函数连续的概念

定义 1.9 (函数连续)

若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续。

用 ε-δ 语言叙述为：设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时都有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续。

♣

1.4.2 间断点的分类

1.4.2.1 第一类间断点

- **可去间断点**：函数在该点处极限存在，但极限值与函数在该点的定义值不相等（或函数在该点无定义）。
- **跳跃间断点**：函数在该点处左右极限都存在，但左右极限不相等。

1.4.3 函数连续的概念

定义 1.10 (函数连续)

若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续。

用 ε-δ 语言叙述为：设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，任给 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时都有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续。

1.4.4 间断点的分类

1.4.4.1 第一类间断点

- **可去间断点**：函数在该点处极限存在，但极限值与函数在该点的定义值不相等（或函数在该点无定义）。
- **跳跃间断点**：函数在该点处左右极限都存在，但左右极限不相等。

1.4.4.2 第二类间断点

- **无穷间断点**：函数在该点处的极限为无穷大。
- **振荡间断点**：函数在该点处极限不存在，且函数值在某一区间内无限振荡。

简单来说，**第一类间断点的左右极限都存在**，第二类间断点的左右极限至少有一个不存在（或为无穷、振荡）。

例题 1.17 已知 $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{\sin \pi x}{x-1}} - 1}(-1 < x < 2)$，试判断 $f(x)$ 的间断点并据理说明间断点的类型。

例题 1.18 指出函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x \le 0 \end{cases}$ 的间断点，并判断其类型。

例题 1.19 指出函数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ 的间断点，并判断其类型。