一、可导性与可微性

1. 定义与相关性质

① 可导性

定义：
设$f(x)$在$U(x_0)$上有定义，

若极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在

则称$f(x)$在x_0处**可导**，
并记$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$为$f(x)$在$x_0$处的**导数**，记为$\dfrac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$或$f'(x)\Big|_{x=x_0}$或$f'(x_0)$

若$\forall x_0\in D$，f都在x_0处可导，则称f在D上**可导**

若$f'(x)$在x_0处可导，则称f在x_0处**二阶可导**

若$f^{(n-1)}(x)$在x_0处可导，则称f在x_0处n阶可导。

以上是对课本上定义的提炼，此处对高阶导数的定义有点过于简略

Remark：

- **①几何意义**：**割线斜率的极限**
- **②等价表述**：事实上，考查$f(x)$在x_0处是否可导，
  就是考查$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},x\in U^\circ(x_0)$在$x_0$处是否有极限
  也就是说极限$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$是否存在
- **③变量替换**：有时会把$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$与$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
  这两个极限联系起来，只要考虑换元$\Delta x=x-x_0$即可
  $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\Delta x=x-x_0\text{（当}x\to x_0\text{时}\Delta x\to 0\text{）}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

③ 单侧导数

我们可以模仿对函数极限的考查，对应地考查$g(\Delta x)$在0处的左右极限

左导数：
设$y=f(x)$在$U_-(x_0)$处有定义，
且极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在
则称$f(x)$在x_0处**左可导**，
并将这个值记为$f'_-(x_0)$

右导数：
设$y=f(x)$在$U_+(x_0)$处有定义，
且极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在
则称$f(x)$在x_0处**右可导**，
并将这个值记为$f'_+(x_0)$

可导的充要条件：
$f(x)$在x_0处可导，当且仅当$f(x)$在x_0处**左右导数存在且相等**

简证：类似于函数极限的讨论
$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 x_0 处极限存在 $\iff$ $g(x)$ 在 x_0 处左右极限存在且相等
$\Updownarrow\Updownarrow$
$f(x)$ 在 x_0 处可导 $f(x)$ 在 x_0 处左、右可导，且左右导数值相等

② 可微性

定义：
设$f(x)$在$U(x_0)$上有定义，且满足
$\exists A\in\mathbb{R}$，使得下式成立
$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$
其中$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
则称$f(x)$在x_0处**可微**，并称$A\Delta x$为$f(x)$在x_0处的**微分**
记作$dy=A\Delta x$
若$y=x$，则称f在x_0处**可导**
微分的一阶不变性

2. 重要性质与结论

① 可微与可导的等价性

定理：
$f(x)$在x_0处可微 $\iff$ $f(x)$在x_0处可导

简证：$f(x)$在x_0处可导
$\iff\ \exists A\in\mathbb{R},s.t.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$
$\iff\ \exists A\in\mathbb{R},s.t.\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$
$\iff\ f(x)$在x_0处可微

考试的时候，可以如上书写，只需把" $\Longrightarrow$ "改成对应的"$\because$"即可
" $\Longleftarrow$ "同理

在一元情形下，可导和可微完全等价，
所以对可导函数进行考查，就是对可微函数进行考查

对应的结论也可以完全平行地进行迁移
用$\varepsilon-\delta$语言书写：…

② 可导/可微与连续的关系

定理：

- 可微必连续，可导必连续
- 同理，左可导必左连续，右可导必右连续

简证：$f(x)$在x_0处可微
$\iff \exists A\in\mathbb{R}, s.t. f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$
$\implies \exists A\in\mathbb{R}, s.t. f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=o(1)\ (\Delta x\to 0)$
$\iff \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff f(x)$在$x_0$处连续

考试的时候，可以如上书写，只需把" $\implies$ "改成对应的"$\because$"即可
用$\varepsilon-\delta$语言书写：…

3. 导数定义的进一步性质

补充说明：由于对$f(x)$在x_0处可导性的考查

就是对极限式$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$的考查
所有函数极限的性质也对应地被"继承"下来**

① **唯一性**
若$f(x)$在x_0处可导，则$f'(x_0)$的值唯一

② **局部有界性**
若$f(x)$在x_0处可导，
则$\exists\delta>0, M>0$，$\forall x\in\dot{U}(x_0;\delta)$，
有$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leq M$

③ **保号性**
设$f(x)$在$U(x_0)$上有定义
若$\exists\delta>0$，$\forall x\in\dot{U}(x_0;\delta)$，均有$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq A$ 且$f(x)$在x_0处可导
则$f'(x_0)\geq A$

④ **保序性**
设$f(x),g(x)$在$U(x_0)$上有定义
若$f(x),g(x)$在x_0处可导，且$f(x)\geq g(x)$
则$\exists\delta>0$，$\forall x\in\dot{U}(x_0;\delta)$，均有$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

⑤ 四则运算（注意乘除的情形，它们与函数极限的情形有区别）

设$f(x),g(x)$在$U(x_0)$上有定义

若$f(x),g(x)$在x_0处可导

则$(f(x)\pm g(x))'|_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$

$(f(x)\cdot g(x))'|_{x=x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\Big|_{x=x_0}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

⑥ 单调收敛准则

1. 设$f(x)$在$U_+(x_0)$上有定义，且$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$U_+(x_0)$内单调递增且有上界
   则$f'_+(x_0)$存在
2. 设$f(x)$在$U_+(x_0)$上有定义，且$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$U_+(x_0)$内单调递增且有下界
   则$f'_+(x_0)$存在
3. 设$f(x)$在$U_+(x_0)$上有定义，且$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$U_+(x_0)$内单调递减且有下界
   则$f'_+(x_0)$存在
4. 设$f(x)$在$U_+(x_0)$上有定义，且$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$U_+(x_0)$内单调递减且有上界
   则$f'_+(x_0)$存在

⑦ 夹逼准则

⑧ Cauchy收敛准则

⑨ 归结原则

4. 例题选讲

eg.1 按导数定义，求 $y=kx+b$ 在 $x=x_0$ 处的导数

eg.2

① 求 $y=\begin{cases}x^2D(x) & x\geq 0\\ kx & x<0\end{cases}$ 在 0 处的左、右导数

(+) ② $y=x^\alpha D(x)$ 何时在 0 处可导，何时在 0 处连续

又问，是否可以取合适的 α，使得 $f(x)$ 在 0 处二阶可导

eg.3 设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin x^\beta & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

① $\alpha=2,\beta=-1$ 时，$f(x)$ 在 0 处是否可导，若存在，求 $f'(0)$

又问 $f'(x)$ 在 0 处是否连续

(*)② $f(x)$ 何时在 0 处连续，何时在 0 处可导，

何时 $f'(x)$ 在 0 处连续（在 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导的前提下）

eg.4 设 $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & x\geq 0 \\ \sin bx & x<0 \end{cases}$

① 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数与右导数.
② b 取何值时，$f(x)$ 在 0 处可导

Q： 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$，写出对应的无穷小量表达式

导数与微分-第二页

一、1.2 阶导数计算

① 初等函数的导数

基本初等函数导数公式

常函数： $(C)'=0$

幂函数： $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\ (\alpha\neq 0)$

对数函数： $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}\qquad(a>0且a\neq 1)$$

指数函数： $(e^x)'=e^x$

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=\ln a\cdot e^{x\ln a}=\ln a\cdot a^x\qquad(a>0且a\neq 1)$$

三角函数：

$$(\sin x)'=\cos x\qquad(\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\qquad(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\qquad(\csc x)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

记忆口诀：

- 半导半不导是sin换成$\cos x$，再加一个负号
- cos换成$\sin x$，再加一个负号
- "c"开头的都有负号

反三角函数：

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\operatorname{arccot} x = -\dfrac{1}{1+x^2}$

记忆口诀：

- 半导半不导是加一个负号
- "c"开头的都有负号

② 基础运算性质

1. 导数的四则运算

设$f(x),g(x)$在$U(x_0)$上有定义
若$f(x),g(x)$在x_0处可导
则：

- $(f(x)\pm g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0)\pm g'(x_0)$
- $(f(x)\cdot g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

2. 导数的复合运算（链式法则）

公式：
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

定理：
设$u=g(x)$在x_0处可导，$y=f(u)$在$u=u_0=g(x_0)$处可导
则$(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'\left(u\big|_{u=g(x_0)}\right)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

推导思路：
在形式上可记忆为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$
也可以这么记忆：
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$\xlongequal{令\ u=g(x)} \lim_{\substack{x\to x_0\\ u\to u_0}}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

注意： 上述证明并不严谨，因为在 $x\to x_0$ 时可能会有 $g(x)=g(x_0)$ 而 $x\in \mathring{U}(x_0)$ 的情形发生

严谨证明（微分语言）：
$f(g(x))-f(g(x_0)) = f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0))+o(g(x)-g(x_0))\ (g(x)\to g(x_0))$
$g(x)-g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ (x\to x_0)$
当 $x\to x_0$ 时，$g(x)\to g(x_0)$

故 $f(g(x))-f(g(x_0))=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)+o(g(x)-g(x_0))\ (x\to x_0)$
$=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ (x\to x_0)$

最好还是用 $\varepsilon-\delta$ 语言书写

3. 反函数的导数

定理：
设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上可导，且在 $U(x_0)$ 上有反函数 $x=f^{-1}(y)$
则：

- $f^{-1\prime}(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
- $f^{-1\prime\prime}(y_0)=-\dfrac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}$

即 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=y_0}=\dfrac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=y_0}}=\dfrac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}}$

说明： 不用特别记忆，可以视作后面**隐函数求导**的特例

4. 对数求导法

公式：
$(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$

适用情形：
当 y 为一堆函数的乘积/开方/幂指等形式

例题：
eg.1 $y=\dfrac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}},求y'$

eg.2 $y=x^{\tan 3x}$

③ 特殊形式函数的求导

1. 普通方程

$y=f(x)$，高中怎么求导就怎么来就行

e.g. $y=x^x e^{\sin^2\frac{1}{x}}$，求$\dfrac{dy}{dx}$

2. 参数方程

形式：
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

求导公式：

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{x'(t)}$

例题：
eg.1 设$\begin{cases} x = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}$，求① $\dfrac{dy}{dx}$ ② $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

eg.2 设$y = y(x)$可由$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$确定，求其在$t = \dfrac{\pi}{2}$处的切线方程

3. 极坐标方程

形式：

$\rho = f(\theta) \iff \begin{cases} x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$

例题：
设曲线C的极坐标方程 $r = e^\theta + \theta$，求C在$\theta = 0$处的切线方程

4. 隐函数方程

形式：
$F(x, y(x)) = 0$

方法：
把y看成$y(x)$，直接求导，然后移项整理一下
等式两边都是两个函数，它们相等恒成立，
故它们关于x的导数也恒相等

例题：
eg.1 设$y = f(x)$是由隐函数$e^{xy} - 2xy = e$确定的隐函数
求 ① $\dfrac{dy}{dx}$ ② $dy|_{x=0}$ ③ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

eg.2 设$y=f(x)$是由隐函数$x^2+y=\tan(x-y)$确定的隐函数，且$y(0)=0$
求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

eg.3 $y-\dfrac{1}{2}\sin y=x$，$y(0)=0$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$
对应的其实是$f(x)=x+\dfrac{1}{2}\sin x$的反函数

Remark

反函数的求导法则也是隐函数求导
只换了变量，对y求导而已
牢记$f^{-1}(y)=x$，以及$f^{-1\prime}(y)=\dfrac{dx}{dy}$，$f^{-1\prime\prime}(y)=\dfrac{d^2x}{dy^2}$

eg. $y=x+x^5$，求$\dfrac{dx}{dy}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}$

例题

eg.1 已知 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

eg.2 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f(1)=0$，$f'(1)=-2$
求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(\cos x)}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$

导数与微分-第三页

二、高阶导数计算

基本函数的高阶导数

请计算以下函数的 n 阶导数：

1. $y=x^\alpha$
2. $y=a^x=e^{x\ln a}\ (a>0\wedge a\neq 1)$
3. $y=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}\ (a>0\wedge a\neq 1)$
4. $y=\sin(x+c)$

基本性质补充

设 f,g 在 x_0 处 n 阶可导，则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，有

$$\left.(\alpha f(x)+\beta g(x))^{(n)}\right|_{x=x_0}=\alpha f^{(n)}(x_0)+\beta g^{(n)}(x_0)$$

例： 设 $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$，求 $f^{(n)}(x)$

① 莱布尼茨法则

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

（其中 $f(x)$ 称为 $f(x)$，$g(x) = g(x)$）

类比 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k}$

对于三个函数的情况：

$$(f_1(x)f_2(x)f_3(x))^{(n)} = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{n!}{i!j!k!} f_1^{(i)}(x) f_2^{(j)}(x) f_3^{(k)}(x)$$

例： $f(x) = x^2 e^x$，求 $f^{(n)}(x)$

② 欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

例： 若 $f(x) = 2e^x \cos x$，求 $f^{(n)}(x)$

解：

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x(e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} \\
\therefore f^{(n)}(x) &= (1+i)^n e^{(1+i)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{(1+i)x} + 2^{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n\pi}{4}} e^{(1-i)x} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} e^{x+i(x+\frac{n\pi}{4})} + e^{x-i(x+\frac{n\pi}{4})} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} e^x \frac{e^{i(x+\frac{n\pi}{4})} + e^{-i(x+\frac{n\pi}{4})}}{2} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

③ 递推公式

例： $f(x) = (\arcsin x)^2$

1. 证明：$(1-x^2)y'' - xy' = 2$
2. 求 $f^{(n)}(0)$

解：

$$\because y = (\arcsin x)^2$$

$$\therefore y' = 2 \cdot \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = 2\left(\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{1-x^2}\right), \quad y''(0) = 2$$

$$\therefore (1-x^2)y'' - xy' = 2$$

$$\therefore \left((1-x^2)y'' - xy'\right)^{(n)} = 2^{(n)}$$

$$\therefore (1-x^2)y^{(n+2)} - n \cdot 2xy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0$$

$$\therefore (1-x^2)y^{(n+2)} - (n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

代入 $x = 0$，得

$$y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0)$$

$$\therefore y^{(2m)}(0) = \prod_{i=2}^{m} \frac{y^{(2i)}(0)}{y^{(2i-2)}(0)} \cdot y''(0) = \prod_{i=2}^{m}(2i-2)^2 \cdot 2 = 2^{2m-1} \cdot ((m-1)!)^2$$

$$y^{(2m+1)}(0) = \prod_{i=1}^{m} \frac{y^{(2i+1)}(0)}{y^{(2i-1)}(0)} \cdot y'(0) = 0$$

$$\therefore y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数或 } n = 0 \\ 2^{n-1} \cdot \left(\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right)^2, & n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

④ Taylor 展开（在后面）

三、导数应用

① 函数性态分析

<1> 单调性

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导

1. 若 $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上**单调递增**；
   若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递增**。
2. 若 $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上**单调递减**；
   若 $f'(x) < 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递减**。
3. 若 $f'(x) = 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上为**常值函数**。

例题：

- 求 $x^4 - 4x + 4e^x = k$ 的不同实根的个数
- 求证 $1 + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}\ \forall x \in \mathbb{R}$

<2> 极值点判断

设 $f(x)$ 在 x_0 处有对应阶数的导数，判断 x_0 是否为极值点的步骤如下：

1. 一阶导数判断：

- 若 $f'(x_0) \neq 0$，则 x_0 **不是极值点**；
- 若 $f'(x_0) = 0$，进入二阶导数判断。

2. 二阶导数判断：

- 若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 是**极小值点**；
- 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 是**极大值点**；
- 若 $f''(x_0) = 0$，进入三阶导数判断。

3. 三阶及更高阶导数判断：

- 若 $f'''(x_0) \neq 0$，则 x_0 **不是极值点**；
- 若 $f'''(x_0) = 0$，继续判断更高阶导数，以此类推。

总结规律：
若 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$，且 $1 \leq k \leq n-1$ 阶导数均为 0：

- 若 n 为**奇数**，x_0 一定不是极值点；
- 若 n 为**偶数**，$f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 x_0 为极小值点，$f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 x_0 为极大值点。

补充结论：
简而言之，若 n 阶导数不为 0，k 阶导数均为 0（$1 \leq k \leq n-1$）：

- 若 n 为奇数，**一定不是极值点**；
- 若 n 为偶数，$f^{(n)}(x_0) > 0$ 为**极小值点**，$f^{(n)}(x_0) < 0$ 为**极大值点**。

<3> 切线

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 f 在 x_0 处的切线满足：

1. 斜率为 $f'(x_0)$

2. 过 (x_0, y_0)

即 $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

<4> 渐近线

两类渐近线：垂直渐近线与斜渐近线

垂直渐近线：
先找间断点，再求间断点处极限
若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线

斜渐近线：

$+\infty$ 处：
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = A$，$\lim_{x \to +\infty} f(x) - Ax = B$，则 $y = Ax + B$ 为 $f(x)$ 的一条斜渐近线
（若 A, B 有一者不存在，则 $+\infty$ 处的斜渐近线不存在）

$-\infty$ 处：
$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \tilde{A}$，$\lim_{x \to -\infty} f(x) - \tilde{A}x = \tilde{B}$，则 $y = \tilde{A}x + \tilde{B}$ 为 $f(x)$ 的一条斜渐近线
（若 $\tilde{A}, \tilde{B}$ 有一者不存在，则 $-\infty$ 处的斜渐近线不存在）

Remark： 如果用无穷小量的语言来写，就是
$f(x) = Ax + B + o(1)\ (x \to +\infty)$
与 $f(x) = \tilde{A}x + \tilde{B} + o(1)\ (x \to -\infty)$

例题：

- 求 $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ 的渐近线
- 求 $y = \ln(e^x + 1)$ 的渐近线
- 求 $y = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2 + 6x + 10}$ 的渐近线
- 求 $y = e^{\frac{1}{|x|}} \arctan \dfrac{x}{(x+1)(x-3)^2}$ 的渐近线

<5> 曲率

设 $y = f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，则 $y = f(x)$ 在 x_0 处的曲率为

$$\frac{|y''(x_0)|}{(1 + y'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}$$

微分中值定理

一、引理

极值点必要条件：
若函数在 x_0 处取到极大/小值且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0) = 0$

反例： $y=|x|$ 在 $x=0$ 处取极小值，但不可导
（基本不怎么会考，大致记一下就行）

二、三个中值定理

① 罗尔（Rolle）中值定理

定理：
设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$（题目中可能会加强为 $D(a,b)$），满足 $f(a)=f(b)$，
则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=0$

补充：广义罗尔定理
设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$，
则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=0$

注： ξ 可能不唯一

证明思路：
考虑 $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b)\\ L, & x=a,b\end{cases}$，
则 $F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，$F(a)=F(b)$，故 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $F'(\xi)=f'(\xi)=0$

② 拉格朗日（Lagrange）中值定理

定理：
设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，
则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

③ 柯西（Cauchy）中值定理

定理：
设 $f(x),g(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $\forall x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$，
则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

等价形式： $(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi)$
（若 $g(b)\neq g(a)$，则不需要 $g'(x)\neq 0$ 的条件）

三、洛必达法则

$\dfrac{0}{0}$ 型

定理：
若 $f(x),g(x)$ 满足：

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

2. $\exists U^{\circ}(x_0)$，使得 $\forall x \in U^{\circ}(x_0)$，$f(x), g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（有限或无穷）

则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$\dfrac{*}{\infty}$ 型

定理：
若 $f(x), g(x)$ 满足：

1. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$
2. $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \mathring{U}(x_0)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$，$A$ 为有限数或 $+\infty$，或 $-\infty$

则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

四、拓展定理

① 导函数中心极限定理

设 $f(x) \in C(U(x_0)) \cap D(\mathring{U}(x_0))$
若 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = A$
则 $f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0) = A$

② 导函数介值性定理

若 $f(x) \in D[a, b]$，则 $\forall \eta$ 介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$
$\exists \xi \in [a, b]$，s.t. $f'(\xi) = \eta$

五、泰勒（Taylor）公式

① 佩亚诺（Peano）型余项

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \ \ (x \to x_0)$$

② 拉格朗日（Lagrange）型余项

设 $f(x) \in C^n[a, b] \cap D^{n+1}(a, b)$，$\forall x, x_0 \in [a, b]$，
$\exists \xi$ 介于 x 与 x_0 之间，s.t.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

③ 柯西（Cauchy）型余项

设 $f(x)\in C^n[a,b]\cap D^{n+1}(a,b)$，$\forall x,x_0\in[a,b]$，
$\exists\xi$ 介于 x 与 x_0 之间，s.t.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

④ 积分型余项

设 $f(x)\in C^n[a,b]$，$\forall x\in[a,b]$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^n dt$$

六、泰勒展开的唯一性

定理：
设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\exists a_0,a_1,\cdots,a_n$，s.t.

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ \ (x\to x_0)$$

则 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$（$k=0,1,\cdots,n$）

★Remark: Taylor 多项式系数具有唯一性
设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 处有定义，且 $\exists a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$
s.t. $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$
则系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是唯一的，且 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$
后续许多处理手法都依赖于 Taylor 展开的唯一性

七、常见的泰勒公式（以 Peano 余项为例）

★ $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)\quad(x\to0)$

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\quad(x\to0)$

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\quad(x\to0)$

$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^6)\quad(x\to0)$

$$★\ (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})\quad(x\to 0)$$

八、泰勒公式的记忆技巧

Tips:

① 记住 e^x 与 $(1+x)^{\alpha}$，其他可通过两个现推

简单记住两个规律：

① 导数关系：

若 $f'(x)=g(x)$，记 $f(x)$ 对应的 Taylor 多项式为 $P_n(x;f)$，$P_n(x;g)$
则 $P_n'(x;f)=P_{n-1}(x;g)$
简而言之，Taylor 多项式有继承求导关系

② 奇偶性分离：

若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2m+1}x^{2m+1}+a_{2m}x^{2m}+o(x^n)\quad(x\to 0)$

则 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=a_0+a_2x^2+\cdots+a_{2m}x^{2m}+o(x^m)\quad(x\to 0)$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2m+1}x^{2m+1}+o(x^m)\quad(x\to 0)$$

$$\frac{f(ix)+f(-ix)}{2}=a_0-a_2x^2+a_4x^4+\cdots+(-1)^n a_{2n}x^{2n}+o(x^m)\quad(x\to 0)$$

$$\frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}=i(a_1x-a_3x^3+a_5x^5+\cdots+(-1)^n a_{2n+1}x^{2n+1}+o(x^m))\quad(x\to 0)$$

应用示例：

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots+x^n\frac{(-1)^n}{}+o(x^{2m})\quad(x\to 0)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2m+1})\quad(x\to 0)$$

（对应项也成导数与积分关系）

$$(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

$\arcsin x$ 同理

$\ln(\cos x+\sqrt{\sin x})$ 的 Taylor 展开
$\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，$\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

② $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots$
可类比 $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots$ 进行记背

九、补充：介值性

(1) 定义：
若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，且满足 $\forall x_1,x_2\in I$，$\forall\mu$ 介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间，$\exists\xi$ 介于 x_1 与 x_2 之间，s.t. $f(\xi)=\mu$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有介值性

(2) 性质：
① 若 $f(x)$ 在区间 I 上有介值性
$\forall\alpha,\beta\in I,\forall\lambda\in(0,1)$
$\exists\xi\in(\alpha,\beta),s.t.f(\xi)=\lambda f(\alpha)+(1-\lambda)f(\beta)$

若有 3 个点呢?

(3) 常见的有介值性的函数：连续函数、导函数

(4) 何时用介值性，何时用中值定理?

- **介值性：** 不涉及求导运算
- **中值定理：** 涉及求导运算

应试部分

一、计算

① 求极限

解题步骤：

- **Step1:** 能求极限的部分先求极限（一般非0）
- **Step2:** 能等价无穷小替换的地方先等价无穷小替换（多为乘除运算）
- **Step3:** Taylor展开 **（展开到哪一项？非零项）**
- **Step4:** 洛必达

如果上述办法都没做出来，基本就是夹逼准则或定积分定义

例题：

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\sin(\sin x))\arctan x}{1-\sqrt{1-x^4}}$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to\infty} x-x^3\ln(1+\frac{1}{x})$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^3}-1+x^4\cos\frac{1}{x}}{\cos x\ln(1+2x)\tan^3 x}$

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(6) $\lim_{x\to\infty}(x^2+x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}$

e.g.2 设 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{xy}-2xy=e$ 所确定的隐函数
(1) 求 $f'(0)$
(2) 求 $\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-1)\sin(ex)}{\sqrt{1+2x^2}-1}$

e.g.3
$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}\right)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln\ln x}-\frac{1}{\ln(x+\ln x)}$

② 高阶导数（Taylor系数的唯一性）

例题：

- $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(7)}(0)$
- $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$，求 $f^{(6)}(0)$
- 设 $y=f(x)$ 是由隐函数 $x^2y=\tan(x-y)$ 确定的隐函数，且 $y(0)=0$
  求 $y(0)$，$y''(0)$ (Taylor展开)

(6) ③ 渐近线
求 $f(x)=\frac{x^{1+x}}{(x+1)^x}$ 在 $x>0$ 时的渐近线

二、证明相关

1、单个值点

两大类思路：

① 跟随Rolle定理的思路（更本质）

Rolle定理的证明思路：

- 基本思路：在区间内部找一个最值点，且在这一点可导，利用Fermat引理即可

- Q1：最值点存在性?
- Q2：如何保证在区间内部?

例题：

- **导函数介值性定理的证明**
  若 $f(x) \in D[a,b]$，且 $f'(a)f'(b) < 0$
  求证：$\exists \xi \in (a,b)$，s.t. $f'(\xi) = 0$
- 若 $f(x) \in D[0,+\infty)$，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$
  求证：$\exists \xi \in [0,+\infty)$，s.t. $f'(\xi) = 0$
- **广义罗尔定理**
  设 $f(x) \in D(a,b)$
  满足 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$
  则 $\exists \xi \in (a,b)$，s.t. $f'(\xi) = 0$

② 直接利用Rolle中值定理，找函数值相等的点（可能需多次用Rolle定理）

1）构造函数

- 如何构造？积分
- 关键是对哪个函数积分？把中值点视为变量，其它参数视为常量

例题：
e.g.1 设 $f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$，$f(1) = 0$
求证：$\exists \xi \in (0,1)$，s.t. $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

e.g.2 设 $f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$，$f(1) = 0$
求证：$\exists \xi \in (0,1)$，s.t. $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$

e.g.3 Lagrange中值定理的证明

e.g.4 Cauchy中值定理的证明

e.g.5 设 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$，$f(a) = 0$
求证：$\exists \xi \in (a,b)$，$f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$

e.g.6 设 $f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$，$f(0) = 0$，$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$，$f(1) = \frac{1}{2}$
求证：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$，$\exists \xi \in (0,1)$，s.t. $f(\xi) + \alpha(f(\xi) - \xi) = 1$

e.g.7 若 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，$f(a) = f(b) = 0$
则 $\exists \xi \in (a,b)$，s.t. $f(\xi) + f'(\xi) = 0$
【Tips：$(f(x)e^x)' = e^x(f(x) + f'(x))$ 只是提供一种可能构造】

e.g.8 设 $f(x) \in C[0,2] \cap D(0,2)$，$f(0) = 0$，$f(1) = 3$，$f(2) = -1$
求证：

(1) $\exists\xi \in (0,2)$，s.t. $f'(\xi)=0$
(2) $\exists\eta \in (1,2)$，s.t. $f(\eta)+f'(\eta)=0$

② 多阶导数

例题:
e.g. 设 $f(x)\in D^3[0,1]$，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=0$，$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=0$
求证：$\exists\xi \in (0,1)$，s.t. $f'''(\xi)=0$

e.g. 设 $f(x)\in D^3[0,1]$，$f(1)=0$，$F(x)=x^3f(x)$
求证：$\exists\xi \in (0,1)$，s.t. $F'''(\xi)=0$

通过适当地构造函数，可以增加一些初值条件

e.g. $f(x)\in D^2[0,1]$，$f(0)=f(1)$
求证：$\exists\xi \in (0,1)$，s.t. $f''(\xi)=\frac{2f(\xi)}{1-\xi}$

在积分的时候，可以适当配凑由常数项多次积分所形成的多项式的系数

三、高阶导数证明技巧

e.g. 设 $f\in D^3[-1,1]$，$f(-1)=0$，$f(0)=0$，$f(1)=1$
证明：$\exists\xi \in (-1,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

证明:
令 $P(x)=(1-x^2)f(0)+\frac{x+x^3}{2}+\frac{1}{2}(x^3-x)=(1-x^2)f(0)+\frac{x+x^3}{2}$
令 $g(x)=f(x)-P(x)$，则 $g(x)\in D^3[-1,1]$
且

$$g'(x)=f'(x)-P'(x)=f'(x)+2xf(0)-\frac{2x+3x^2}{2}$$

$$g''(x)=f''(x)+2f(0)-\frac{2+6x}{2}=f''(x)+2f(0)-1-3x$$

$$g'''(x)=f'''(x)-3$$

注意到 $g(-1)=g(0)=g(1)=0$，$g'(0)=0$
$\therefore \exists\xi_1\in(-1,0)$，$\xi_2\in(0,1)$
s.t. $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

$\because g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g'(0)=0$
$\therefore \exists\xi_3\in(\xi_1,0)$，$\xi_4\in(0,\xi_2)$
s.t. $g''(\xi_3)=g''(\xi_4)=0$

$\therefore \exists \xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset [-1,1]$
s.t. $g'''(\xi) = 0$
即 $f'''(\xi) = 3$

有些时候，出题人已经帮你构造好了

e.g. 设 $f \in D^3[0,1]$，满足 $f(0) = -1$，$f'(0) = 0$，$f(1) = 0$
证明：$\forall x \in [0,1]$，$\exists \theta \in (0,1)$，
s.t. $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta)$

证明：
$\forall x_0 \in [0,1]$，令 K 为满足下式的常量（K 值法）

$$f(x_0) = -1 + x_0^2 + \frac{x_0^2(x_0-1)}{6} K$$

令 $g(x) = f(x) + 1 - x^2 - \frac{x^2(x-1)}{6} K$
则 $g(x) \in D^3[0,1]$，$g'(x) \in D^2[0,1]$，$g''(x) \in D[0,1]$

$$g'(x) = f'(x) - 2x - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x(x-1)}{6}\right) K = f'(x) - 2x + \frac{3x^2 - 2x}{6} K$$

$$g''(x) = f''(x) - 2 - \frac{6x-2}{6} K$$

$$g'''(x) = f'''(x) - K$$

注意到 $g(0) = g(1) = g(x_0) = 0$，$g'(0) = 0$
$\because g \in D^3[0,1]$
$\therefore \exists \xi_1 \in (0, x_0)$，$\xi_2 \in (x_0, 1)$
s.t. $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$

$\because g' \in D^2[0,1]$，$g'(0) = g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$
$\therefore \exists \xi_3 \in (0, \xi_1)$，$\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$
s.t. $g''(\xi_3) = g''(\xi_4) = 0$

$\because g'' \in D[0,1]$
$\therefore \exists \theta \in (\xi_3, \xi_4) \subset (0,1)$
s.t. $g'''(\theta) = f'''(\theta) - K = 0$
$\therefore f'''(\theta) = K$

$\therefore \forall x \in [0,1]$，$\exists \theta \in (0,1)$，
s.t. $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta)$

Taylor展开与函数介值性应用

一、适用场景与基本方法

适用场景：
① 只有一个介值
② 多项式情形
③ 仅有一点有连续的高阶导数值，且这一点不是最值
④ 问n阶导，一般要知道0,1,2,⋯,n-1阶导的初值但不明确，部分导数信息可通过代数变形消掉

方法本质：
此类方法所适用的题目本质是为了简化书写。此处介绍的方法是一种微分中值工具：Taylor公式的强度，同时展示一下微分中值。

Taylor公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

做题关键：

- **在哪一点进行展开？**（有高阶导数的那点）
- **展开到第几项？**（介值对应的导数阶数）
- **对哪些点在该处展开？**（一般来说题目中的所有点）

二、单介值点问题

e.g.1
设 $f \in D^2[0,1]$，$f(0) = f(1) = 0$，$\min_{0 \le x \le 1} f(x) = -1$，
求证：$\exists \xi \in (0,1)$，$f''(\xi) \ge 8$

证明：
$\because f \in D^2[0,1]$
$\therefore f \in C[0,1]$
$\exists c \in [0,1]$，$\forall x \in [0,1]$，$f(x) \ge f(c)$
即 $f(c) = \min_{0 \le x \le 1} f(x) = -1$
则 $f'(c) = 0$

对 $x \in \{0,1\}$，在 $x = c$ 处进行展开
$\exists \xi_1 \in (0,c)$，$\xi_2 \in (c,1)$

$$f(0) = f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0 - c)^2$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2$$

化简，得

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2}$$

$$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}$$

$\therefore \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(1-c)^2}\geq 8$

由介值性，知
$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，s.t. $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$

e.g.3.2
设 $f(x)\in C[a,b]\cap D^2(a,b)$，
求证：$\forall x\in(a,b)$，$\exists\xi\in(a,b)$
s.t. $f(x)=\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$

证明：
$\forall x_0\in(a,b)$
对 $x=a$，$x=b$ 在 $x=x_0$ 处进行展开
$\exists\xi_1\in(a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x_0)^2 \quad ①$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x_0)^2 \quad ②$$

原题中没有给出 $f'(x_0)$ 的值，我们尝试将它消去
①×$(b-x_0)$ + ②×(x_0-a)，有

$$(b-x_0)f(a)+(x_0-a)f(b)=f(x_0)(b-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x_0)^2(b-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x_0)^2(x_0-a)$$

即

$$f(x_0)=\frac{x_0-b}{a-b}f(a)+\frac{x_0-a}{b-a}f(b)+\frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}\left(\frac{a-x_0}{a-b}f''(\xi_1)+\frac{x_0-b}{a-b}f''(\xi_2)\right)$$

(此处化简是为了追原题中的形式)

由导函数介值性知
$\exists\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$，s.t. $\frac{a-x_0}{a-b}f''(\xi_1) + \frac{x_0-b}{a-b}f''(\xi_2) = f''(\xi)$

此时已证毕

e.g.
$f(x) \in D^2[a, c]$ 且 $a < b < c$
求证：$\exists\xi \in (a, c)$
s.t. $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(\xi)$

三、多介值点问题

1）没有要求介值点互异（Cauchy中值定理）

e.g. 设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 且 $a > 0$
求证：$\exists\xi, \eta \in (a, b)$，s.t. $f'(\xi) = (a + b) \cdot \frac{f'(\eta)}{2\eta}$

e.g. 设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$，$0 < a < b < \frac{\pi}{2}$
求证：$\exists\xi, \eta \in (a, b)$，s.t. $f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2} = f'(\xi) \cdot \frac{\sin\eta}{\cos\xi}$

2）要求介值点互异

一般都是一阶导数且要求介值点互异。关键在于配凑或插入点（虽说大部分情况下都已经配凑好了）。

解题步骤：

- **Step1：** 将同一个值点的归到一边，用Cauchy中值/Lagrange中值/数列原来找
- **Step2：** 配凑插入点

e.g. 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$
求证：
(1) $\exists c \in (0, 1)$，s.t. $f(c) = \frac{2}{2023}$
(2) $\exists\xi, \eta \in (0, 1)$，s.t. $\frac{3}{f(\xi)} + \frac{2020}{f'(\eta)} = 2023$

e.g. 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$
求证：
(1) $\exists c \in (0, 1)$，s.t. $f(c) = 1 - c$
(2) $\exists\xi, \eta \in (0, 1)$，s.t. $f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$

四、介值点极限相关

（这种题说白了就是一种题，实在不行直接背过程都行）

e.g. 设 $f(x) \in C^1(U(a))$，且 $f(a)=0$
$\forall h \in (0,a)$，有 $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta_h h)\cdot h$
则 $\lim_{h\to 0}\theta_h=\frac{1}{2}$

e.g. 设 $f(x)$ 在点 a 处二阶可导，且 $f''(a)\neq 0$
则当 h 充分小时，有 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta_h h)\cdot h$
求证：$\lim_{h\to 0}\theta_h=\frac{1}{2}$

e.g. 设 $f(x)\in C^n[a,b]$，且 $\forall h\in(0,b]$

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)}{n!}\cdot h^n$$

求证：$\lim_{h\to 0}\theta_h=\frac{1}{n+1}$

e.g. 设 $f(x)\in C^n[a,b]$，且 $f^{(k)}(a)=0$（$k=2,3,\cdots,n-1$）
且 $\forall h\in(0,b]$

$$f(a+h)=f(a)+f^{(n)}(a+\theta_h h)\cdot h$$

求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta_h=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

五、导数控制

e.g. 设 $f(x)\in D^2[0,+\infty)$，且 $|f(x)|\le a$，$|f''(x)|\le b$，$\forall x\in(0,+\infty)$
求证：
① $\forall x\in(0,+\infty)$，$|f'(x)|\le 2a+\frac{1}{2}$
② $\forall x\in(0,+\infty)$，$|f'(x)|\le 2\sqrt{ab}$

e.g. 设 $f(x)\in D^2(\mathbb{R})$，且 $\forall x\in(0,+\infty)$，$|f(x)|\le M_0$，$|f''(x)|\le M_2$
求证：$\forall x\in\mathbb{R}$，$|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2}$

e.g. 设 $f(x)\in D^3(\mathbb{R})$，且 $\forall x\in(0,+\infty)$，$|f(x)|\le M_0$，$|f'''(x)|\le M_3$
求证：$\forall x\in\mathbb{R}$，$|f'(x)|\le\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$

解：

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{h^3}{6}\cdot f'''(\xi)$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2-\frac{h^3}{6}\cdot f'''(\eta)$$

希望消去 $f''(x)$，
两式作差，得

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^3}{6}\left(f'''(\xi)+f'''(\eta)\right)$$

$\therefore |f'(x)h| \leq 2M_0+\frac{|h|^3}{6}\cdot 2M_3$
$\therefore |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{|h|}+\frac{|h|^2}{3}\cdot M_3$
$\because \frac{|h|^2}{3}M_3+\frac{2M_0}{|h|}=\frac{|h|^2}{3}M_3+\frac{M_0}{|h|}+\frac{M_0}{|h|} \geq 3\sqrt[3]{M_0^2\cdot\frac{M_3}{3}}=\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$
$\therefore |f'(x)| \leq \sqrt[3]{9M_0^2M_3}$

函数凹凸性与拐点

一、凹函数定义

（1）定义

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，且曲线 $y=f(x)$ 都在曲线上任意一点的上方，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的。

（2）等价刻画

$f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的等价于以下叙述：

1. 割线定义：
若在 (a,b) 上有定义，且 $\forall x,y,z\in(a,b)$，$x<y<z$，有 $f(xy)\leq xf(x)+(1-x)f(y)$（原文公式表述不完整，按原文直译呈现）

2. 割线斜率单调性：
$f(x)$ 在 (a,b) 上可导，且 $\forall x,y,z\in(a,b)$，$x<y<z$，有

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<\frac{f(x)-f(z)}{x-z}<\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

3. 切线斜率单调性：
$f(x)$ 在 (a,b) 上可导，且 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单调递增。

（3）二阶导判定

若 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，
则 $f''(x)>0 \iff f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的。

（4）几何直观

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的下凸函数，则满足下列非单调情形之一：
① $f(x)$ 在 $[a,b)$ 递减

② $f(x)$ 在 $(a,b]$ 递增
③ $\exists c \in [a,b]$，使得 $f(x)$ 在 (a,c) 递减，在 (c,b) 递增

二、凹凸性应用例题

e.g. 设 $f(x)$ 为凹函数，$\forall x,y \in [a,b]$，$x+y=a+b$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

e.g. 哈达马（Hadamard）不等式

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

三、拐点

1. 定义

设 $f(x) \in C(U(x_0))$，若 x_0 是 $f(x)$ 凹与凸的分界点，则称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的拐点。

Remark： 若 $f(x)$ 连续，其实在大多数情况下，可以简单地将拐点视为 $f'(x)$ 的极值点。

2. 必要条件
   若 $f(x) \in D^2(U(x_0))$，且 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$
3. 充分条件
   若 $f(x) \in D^2(U(x_0))$，且 $f''(x_0)=0$，$f''(x)$ 在 x_0 两侧异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点