Lecture

不定积分相关计算

1 不定积分

Definition

若在区间 I 上，函数 $F(x)$ 的导数 $F'(x) = f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

若 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，则

$$(F(x) - G(x))' = 0 \Longrightarrow F(x) - G(x) = C, \quad C \text{ 为常数}.$$

用 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示 $f(x)$ 的所有原函数的集合，称为 $f(x)$ 的不定积分.

不难看出，微分运算与不定积分运算构成了一对逆运算：

$$F(x) + C \underset{\int}{\overset{\mathrm{d}}{\rightleftharpoons}} f(x)\mathrm{d}x$$

实际上，微分与不定积分的逆运算体现了两个重要的性质：

1. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x).$
2. $\displaystyle\int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$

这两条性质看似显然，但在微积分运算中经常使用，且初学者往往难以熟练运用，值得注意.

2 不定积分的运算

不同于“正着来”的导数运算，不定积分的运算需要我们“反着来”构造原函数，因此相对来说会较为困难.

首先需要我们熟记基本初等函数的不定积分公式，一些易混易错的公式：

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$，而非 $\ln x + C$.
2. $\displaystyle\int \cos ax\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax + C$，$\displaystyle\int \sin ax\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax + C \quad (a \neq 0)$. 注意 $\dfrac{1}{a}$ 与正负号.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$，$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$.

   不要与 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 混淆.

然而，仅掌握这些公式并不能解决大部分的不定积分计算，还需要掌握一些常用的计算技巧，例如换元积分法和分部积分法.

3 换元积分法

Definition

第一换元积分法（凑微分法）：若 $f(x)=\tilde{f}(g(x))\cdot g'(x)$，且 $\int \tilde{f}(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \tilde{f}(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x))+C.$$

第二换元积分法：若 $x=g(t)$，且可以反过来求解出 $t=g^{-1}(x)$，并且 $\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F(g^{-1}(x))+C.$$

第一换元积分通过凑微分实现，而第二换元积分常常通过三角换元实现.

4 换元积分法的例子

Problem 1

求 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^n+1)}\mathrm{d}x$.

经典凑微分.

Problem 2

求 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

- 解法 1：用第一换元，令 $u=\dfrac{1}{x^2}$.
- 解法 2：用第二换元，令 $x=\dfrac{1}{t}$.
- 解法 3：用第二换元，令 $x=\tan t$.

5 Tips

- 记住一些常见的微分形式，如 $x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$，$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$，$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x|)$，$e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(e^x)$，$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$，$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$ 等.
- 带根号的积分往往会考虑三角换元.
  - 若遇到 $\sqrt{a^2-x^2}$，可令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$.
  - 若遇到 $\sqrt{a^2+x^2}$，可令 $x=a\tan t$ 或 $x=a\cot t$.
  - 若遇到 $\sqrt{x^2-a^2}$，可令 $x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$.

6 分部积分法

Definition

分部积分法是基于以下公式的积分方法:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

其中 u 和 v 是可微函数.

分部积分法常用于处理积的积分，特别是当其中一个因子容易求导而另一个因子容易积分时. 在进行分部积分时也常常将容易求导的部分设为 u，容易积分的部分设为 $\mathrm{d}v$.

7 分部积分法的例子

Problem 1

求 $\displaystyle\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

Solution

解: $\arctan x$ 易求导，x 易积分，因此可令 $u=\arctan x$，$\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{x}{2} + \arctan\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Problem 2

求 $\displaystyle\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

> Tips: 不要忘了 1 也可以充当 v.

Solution

$$\begin{aligned}\int\arcsin x\mathrm{d}x &= x\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,\\ &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2),\\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Problem 3

求 $\displaystyle\int f(x)\cos nx\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int f(x)\sin nx\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 为多项式函数.

|| Tips：在两个因子都容易求导/求积分时可以试试轮流充当 u 与 v.

Solution

以 $\int f(x)\cos nx\mathrm{d}x$ 为例，经试验，以 $f(x)$ 为 u 更合适.

$$\int f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{f(x)}{n}\sin nx-\frac{1}{n}\int f'(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

注意到 $f'(x)$ 的次数比 $f(x)$ 小 1，因此对 $\int f'(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 再次使用相同的分部积分处理，最终可得到一个只包含三角函数的不定积分，可直接积出.

|| ~~实际上这就是 Fourier 级数的系数，超纲了~~. 感兴趣的同学可尝试推导通项公式.

换元积分和分部积分是最常用的两种不定积分计算方法，很多时候需要结合使用，灵活使用，掌握一些常见的变形技巧，将题目转换成适于使用这两种方法的形式.

~~换句话说，需要代数变形的功力~~.

当然，掌握一些常见的不定积分型也有助于我们拓宽变形的思路，很多时候题目也会直接考察这些常见形式的不定积分——有理函数的不定积分，三角函数的不定积分，根式函数的不定积分，等等.

8 有理函数的不定积分

Definition

称 $\frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ 为有理函数，其中 $p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 分别为 m 次和 n 次多项式.

由于带余除法可将有理函数化为真分式加多项式，因此只考虑 $m<n$ 的情形.

基本步骤：

1. 化为真分式：若 $\deg P(x)\geq\deg Q(x)$，先用多项式除法化为多项式与真分式之和.
2. 分母因式分解：将分母 $Q(x)$ 分解为一次因式和二次不可约因式的乘积.
3. 部分分式分解：将真分式分解为简单分式的和.
4. 逐项积分.

9 有理函数的部分分式分解

由代数基本定理，设 $Q(x)$ 已分解为：

$$Q(x)=(x-a)^k\dots(x^2+px+q)^m\dots$$

其中 x^2+px+q 无实根（判别式 $\Delta<0$）. 则分解形式为：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots$$
$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

让我们用具体的例子来说明如何进行部分分式分解.

10 有理函数积分的例子

Problem 1

求 $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

Solution

解: 分母分解: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

设 $\displaystyle\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$.

通分: $x+1 = A(x-3)+B(x-2)$,

解得: $A=-3, B=4$.

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int\left(-\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}\right)\mathrm{d}x = -3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C.$$

Problem 2

求 $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

Solution

解: 设 $\displaystyle\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$. 通分:

$$x^4+x^3+3x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1).$$

取 $x=1$ 可得 $A=1$, 比较 x^4 与 x^3 的系数可得 $B=0, C=1$.

取 $x=\mathrm{i}$ 可得 $-3-\mathrm{i} = (-D-E)+(E-D)\mathrm{i}$, 从而 $D=2, E=1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\right)\mathrm{d}x, \\
&= \ln|x-1| + \arctan x + \int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x, \\
&= \ln|x-1| + \frac{3}{2}\arctan x - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.
\end{aligned}$$

11　三角函数的不定积分

处理三角函数积分时，常用的方法有：

1. 三角恒等式变形：如 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 等.
2. 配对积分：对于 $\displaystyle\int \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$，根据 m,n 的奇偶性选择不同方法.
3. 万能代换：令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=2\dfrac{t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

12　三角函数积分的例子

Problem 1

(m,n 一奇一偶) 求 $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

Solution

解：$\sin^3 x\cos^2 x=\sin x(1-\cos^2 x)\cos^2 x$.

令 $u=\cos x$，则 $\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x&=\int u^2(1-u^2)(-\mathrm{d}u)=\int (u^4-u^2)\mathrm{d}u,\\&=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.\end{aligned}$$

‖ Tips：当正弦或余弦的幂次为奇数时，可以分离出一个因子与 $\mathrm{d}x$ 凑微分.

Problem 2

(m,n 同奇同偶) 求 $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^3 x\mathrm{d}x$.

Solution

解：设 $t=\tan x$，则 $\sin x\cos x=\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\dfrac{t}{1+t^2}$，$\sin^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^3 x\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^3\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(1+t^2)^4}\mathrm{d}t^2,\\&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^4}\right)\mathrm{d}u\quad(u=1+t^2=\sec^2 x),\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2u^2}+\frac{1}{3u^3}\right)+C=-\frac{1}{4}\cos^4 x+\frac{1}{6}\cos^6 x+C.\end{aligned}$$

‖ Tips：当正弦和余弦的幂次同为奇数或偶数时，可以尝试用正切函数代换.

Problem 3

(使用万能公式) 求 $\displaystyle\int\frac{1}{4+4\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Solution

解：令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{4+4\sin x+\cos x}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{4+\frac{8t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{5+8t+3t^2}\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{2}{(3t+5)(t+1)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{3}{3t+5}\right)\mathrm{d}t\\
&=\ln|t+1|-\ln|3t+5|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|-\ln\left|3\tan\frac{x}{2}+5\right|+C.
\end{aligned}
$$

|| Tips：对于有理次数组成的三角函数积分，万能公式能将其转换为有理函数积分，因此总是可行的，~~但不总是可算的~~.

更一般的：

- 若 $R(\cos x,-\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$，则令 $t=\cos x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；
- 若 $R(-\cos x,\sin x)=-R(\cos x,\sin x)$，则令 $t=\sin x$，$x\in(0,\pi)$；
- 若 $R(-\cos x,-\sin x)=R(\cos x,\sin x)$，则令 $t=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

13 根式函数的不定积分

对于含有根式的积分，常用的方法有：

1. 三角代换：对于 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ 等形式进行三角换元，前面已经提到.
2. 欧拉代换：适用于 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的形式.
   - 若 $a>0$，则令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$；
   - 若 $c>0$，则令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$.
   - 若 ax^2+bx+c 有实根 α,β，则可令 $ax^2+bx+c=(x-\alpha)t$.
3. 有理化代换：若整个积分是关于 x 和 $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 的有理函数，则令整个根式等于新的变量 t，将 x 用 t 表示出来，从而将积分化为关于 t 的有理函数积分.

14 根式函数积分的例子

Problem 1

求 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\mathrm{d}x$.

Solution

解：令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2 t+1}=\sec t$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sec t}{\tan t}\cdot \sec^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{\sec^3 t}{\tan t}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\cos^2 t\sin^2 t}.
\end{aligned}
$$

令 $u=\cos t$，对 $\int \frac{1}{u^2(1-u^2)}\mathrm{d}u$ 使用有理函数积分：

$$
\int \frac{1}{u^2(1-u^2)}\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C.
$$

将 $u=\cos t$ 和 $t=\arctan x$ 代回即可.

Problem 2

求 $\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}\mathrm{d}x$.

Solution

设 $t=\sqrt[3]{\frac{x-4}{x+1}}$，则 $x=\frac{t^3+4}{1-t^3}$，$x+1=\frac{5}{1-t^3}$，$\mathrm{d}x=\frac{15t^2}{(1-t^3)^2}$，故

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}\mathrm{d}x &= \int \sqrt[3]{t^6\cdot\left(\frac{1-t^3}{5}\right)^6}\cdot\frac{15t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{3}{5}t^4\mathrm{d}t = \frac{3}{25}t^5+C.
\end{aligned}
$$

代回 t 即可.

Problem 3

求 $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$.

Solution

令 $\sqrt{1+x+x^2}=xt+1$，则 $1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1$，解得 $x=\frac{2t-1}{1-t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$，$xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2}$.此时

$$
\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x = \int -\frac{t}{xt+1}\cdot\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-1} = \ln(t^2-1).
$$

从关系式中反解出 x 代回即可.

15 总结

- 有理函数积分：部分分式分解是关键

- 三角函数积分：灵活运用三角恒等式和代换
- 根式函数积分：三角代换是常用方法

掌握这些常见类型的不定积分计算方法，结合换元积分法和分部积分法，可以解决大部分的不定积分问题。

> 实际计算中，多练习、多总结是提高积分计算能力的最佳途径。