积分

定积分：分割作和取极限

rt，对函数在[a,b]上作分割

$$\Delta=\{[x_i,x_{i+1}]|0\le i\le n-1\}a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$$

则若

$$\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

存在，则定积分 I 存在，记

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

。

Example

求$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

牛顿-莱布尼茨公式

$$f\in C[a,b],\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C(F^{'}(x)=f(x))$$
$$\text{则}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$$

Warning

1.有原函数的函数必可积，**但可积函数不一定有原函数！**（可以用带第一类间断点的函数轻松举例）
2.可积函数**即使有原函数可能也求不出原函数是什么**。因此不是所有积分都能用牛顿-莱布尼茨公式计算

我们做到的绝大多数定积分都能通过牛顿-莱布尼茨公式转化为不定积分求解。因此，在定积分中，**第一、第二换元法，分部积分法依然适用！**

Example

尝试在不定积分的练习中找几个计算0到1的定积分！

基本性质

1. 线性性，保序性，保号性，迫敛性准则
2. 区间可加性$\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$

常见积分方法

第一换元法（凑微分法）

$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi^{'}(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

人话：找到函数中比较好积的部分，放到d里面，把这个作为积分变量积分。**这很考验观察！~~不然为什么叫凑呢~~**

Example 1

$\int_0^1 \tan x \sec x \mathrm{d}x$

Example 2

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\mathrm{d}x$（就先借用一下反常积分吧）

分部积分法

和第一积分法经常打出连招！瞬间秒杀积分大部分于无形。在涉及三角函数、指数函数的积分中经常使用！

$\int f(x)g^{'}(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\mathrm{d}f(x)$

Example

求 $\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x, \int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x, \int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x$

邪修：正式考试禁止使用，仅用于检查答案！

$\int e^x \sin x\mathrm{d}x$太麻烦！我们把手伸向实数之外呢？

第二换元法

令 $x = \varphi(t), \int_a^b f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)$

$\therefore \int f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi^{-1}(b)) - F(\varphi^{-1}(a))$

人话：把x用t的函数代换，使积分形式易于用t表示，最后在结果中代换回来。

注意出现反函数!

第二换元法有一个~~大多数情况都满足的~~**重要条件,$\varphi(t)$单调可导且导函数不为0!**

Example

求 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x, \cancel{\int_{-a}^{a} \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x}, \int_{-a}^{a} \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$

定积分的计算：

1. 弧长：

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x=\int_\eta^\xi\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

2. 面积、体积：根据定积分定义即可。大不了画个图，分割作和
3. 旋转体体积：

$$V=\int_a^b\pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

4. 极坐标变换求面积：

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

一些有趣的结论：

1. Wallis公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!},n=2k+1\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2},n=2k\end{cases}$$

2. Stirling公式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}=1$$

   证明非常神奇，建议感兴趣的同学查阅后反复观摩，~~真的有人能复刻吗~~
3. Wallis公式的第一个等号其实非常简单，可以抽象成这样一件事情：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$$

   使用相同的证明方法，还可以证明

$$\int_0^{2\pi}xf(\cos x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}f(\cos x)\mathrm{d}x$$
$$\cancel{\int_0^{2\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x}$$

   还在牛顿-莱布尼茨公式？别人早就跑啦！

Example

1.

$$f(x)=\int_0^x\sqrt{\cos t}\mathrm{d}t$$

求$y=f(x)$在[0,1]的弧长
2.求

$$e^x,ex,x=0$$

三根曲线所夹区域绕x轴一周的体积
3.求

$$f(x)=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\mathrm{d}t$$

在$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$的弧长
4.求

$$r=\sqrt{\cos 2\theta}$$

围成图形的面积
5.求

$$\int_0^{2\pi} x\sin^{10}x\mathrm{d}x$$

变限积分与中值定理

第一中值定理

$f\in C[a,b],\exists h\in[a,b],s.t.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(h)(b-a)=f(a+\theta(b-a))(b-a)$，此时称$f(h)$为$f(x)$在$[a,b]$的**积分平均**。

人话：我能在无限个高度中找一个平均高度！

变限积分

> **Note**
>
> 连续函数**必有原函数**，~~尽管我们不一定知道它是什么~~。

$f\in C[a,+\infty]$，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F^{'}(x)=f(x)$

也就是说，不管原函数能不能初等表示，我们找到了一个函数，使它的导数等于$f(x)$!

证明：$\forall x_0\in[a,+\infty]$
$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^x f(x)\mathrm{d}x}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f(x_0+\theta(x-x_0))=f(x_0)$

由此，当我们要证明一个关于x的积分不等式，结果发现做不出来时，**我们可以把看起来像参数的一些量当作未知数，把x当作参数！**

通常，被看作未知数的就是积分上限。

> **Example 1**
>
> 证明$Cauchy-Schwarz$不等式:
>
> $$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

> **Example 2**
>
> $f\in C[a,b],0\leq f(x)\leq M$，证明:

$$(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)^2-(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x)^2-(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x)^2\le\frac{M^2(b-a)^4}{12}$$

Example 3

证明$Wierstrass$型积分第二中值定理（假设f连续，g可微单调）

当上限、下限是关于x的函数时，$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\mathrm{d}t, F^{'}(t)=\psi^{'}(x)f(\psi(x))-\varphi^{'}(x)f(\varphi(x))$

拓展：当被积函数里面出现x了，那还怎么求导呢?

$F(x)=\int_a^x f(x,t)\mathrm{d}t, F^{'}(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_a^{x_0}(f(x,t)-f(x_0,t))\mathrm{d}t+\int_{x_0}^x f(x,t)\mathrm{d}t}{x-x_0}=\int_a^{x_0}f_X(x_0,t)\mathrm{d}t+f(x_0,x_0)$

书上有道作业题，$F(x)=\int_0^x(x-t)f^{'}(t)\mathrm{d}t$，求$F^{'}(x)$，并令$f^{'}(t)=\sin t$求解，说的就是这个事情。

第二中值定理

1. $Bonnet$型：

   $(i)x\in[a,b],g(x)\ge0,g(x)\downarrow,\exists\xi,s.t.\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$

   $(ii)x\in[a,b],g(x)\ge0,g(x)\uparrow,\exists\eta,s.t.\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$

   $--------$

   下证(i)：若$g(a)=0$，则$g(a)\equiv0$（表示在区间上恒为0），左$=$右$=0$

   若$g(a)\ne0$，则设$F(\xi)=\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$最大值$M$，最小值$m$,

   $\therefore$根据连续函数介值性即证$mg(a)<\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x<Mg(a)$

   对g作分割Δ,则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x=I_1+I_2$

   对I_1应用可积理论，$\because f(x)$可积必有界，故$|f(x)|<L$

   $\forall\frac{\epsilon}{L}>0,\sum_{i=1}^n|g(x)-g(x_{i-1})|\Delta x<\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x<\frac{\epsilon}{L}$

   $\therefore|I_1|<\sum_{i=1}^n|f(x)|\omega_i\Delta x<L\cdot\frac{\epsilon}{L}=\epsilon$

   对$I_2,\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i)-F(x_{i-1}))=g(x_{n-1})F(x_n)-g(x_0)F(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1}F(x_i)(g(x_{i-1})-g(x_i))$

   $\because F(x_0)=F(a)=0,$而$F(x)<M$，故$I_2<Mg(x_0)=Mg(a),$同理$M>g(a),$故$-\epsilon+mg(a)<I_1+I_2<\epsilon+Mg(a)$，由$\epsilon$任意性得证

2. $Wierstrass$型：

   g单调，f可积，$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$

   $--------$

   证明：不妨g递减，令$G(x)=g(x)-g(b)$，$G(x)$非负递减，

   $\exists\xi,\int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x=G(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$

   $\therefore\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\mathrm{d}x=(g(a)-g(b))\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$

   移项则定理成立。递增时同理也满足。

目前在考试中第二积分中值定理的应用好像并不多。(去年压轴比较像，但是使用变限积分即可证明)
大家补天补不到这里的话就选择性跳过吧~

> **Example**
>
> 还记得在变限积分证过的吗？那就使用$Wierstrass$型第二积分中值定理证明$Bonnet$型中值定理吧！（Hint 换元法）

反常积分：唯一缺点是泰过丸美~的逆否命题

~~当然是不完美不是缺点了！~~ 这不严谨。

反常积分分为两类，一类是无穷积分，另一类是瑕积分。其中，无穷积分为考试重点，且下学期很多知识与这个有关！

无穷积分

敛散性判别

首要条件！$\lim_{x\to+\infty}=0$，否则必发散！

定义法

$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$，则称该积分收敛，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=I$，极限不存在或为无穷时积分发散。

回想一下数列、函数的极限。当我们不知道函数、数列的极限是什么的时候，我们使用什么判别敛散性？

柯西收敛定理

$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall x_1,x_2>N,|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x|<\epsilon$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛

个人感觉有点问题。应该加入条件$\int_a^N f(x)\mathrm{d}x$是正常积分或收敛。不加这个条件能举出什么反例？

绝对值判别法

$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛

由此新增了绝对收敛和条件收敛的概念！

如果我们把函数的“正半”和“负半”积分，那么对于绝对收敛和条件收敛的函数，会有哪些现象？

比较判别法

$f(x)>0,\forall b>a,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<J$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛
$0<f(x)<g(x),\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛则$f(x)$收敛。反之$f(x)$发散则$g(x)$发散

> **判断以下积分收敛性**
>
> 1.$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$
> 2.$\int_1^{+\infty}\sin(\frac{1}{x})\mathrm{d}x$（~~积分下界变成0呢?~~） $\int_0^1\sin(\frac{1}{x})dx$ 呢?
> 3.$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$

狄利克雷-阿贝尔判别法

阿贝尔变换

$S=\sum_{i=1}^n a_ib_i=\sum_{i=1}^n[(b_i-b_{i-1})\sum_{j=1}^{n-i+1}a_i]$(这里定义$b_0=0$)

看起来晕晕的！其实画个图就明白了：可以看作好几个矩形水平叠在一起，然后横向求面积！
真要证的话，从右到左展开即可！

> ✏️ **Note**
>
> 这个变换可以直接用于证明级数**数列**和收敛

回头再看看$Bonnet$型第二中值定理的证明，为什么被这样奇怪地拆分了？

阿贝尔判别法

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，$g(x)$单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛

证明：即证$\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n_1, n_2 > N, |\int_{n_1}^{n_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x| < \epsilon$

熟悉吗？直接应用第二积分中值定理即可。完整证明阿贝尔判别法就要用到阿贝尔变换。这一点在下学期讲的级数中更加常见，阿贝尔变换也更加重要。

狄利克雷判别法

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$有界$,g(x)$单调收敛于0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛

证明 : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \forall\epsilon, \exists N, s.t.\forall x > N, |g(x)| < \frac{\epsilon}{4L}$，其中$L$为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的界，$|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x| < L$

$\therefore \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = (\int_{x_1}^{+\infty} - \int_{x_2}^{+\infty})f(x)\mathrm{d}x < |\int_{x_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x| + |\int_{x_2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x| < 2L$

$\forall b > a, \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$

$\therefore |\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x| < |g(a)||\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x| + |g(b)||\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x| < \frac{\epsilon}{4L} \times 2L + \frac{\epsilon}{4L} \times 2L = \epsilon$

$Q.E.D.$

定理的证明不难，~~而且实际使用的时候可以混用~~（建议记住，因为有一年考试考了“用狄利克雷判别法证明……），但是这个定理非常强大！可以解决很多收敛性问题！

> **判断以下函数收敛性**
>
> 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$
> 2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

*瑕积分：把无穷积分的所有“无穷”部分换成瑕点！

$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I \Rightarrow \lim_{b\to b_0} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I$

$\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall x_1, x_2 > N, |\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x| < \epsilon \Rightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta, \forall x_1, x_2 \in [a, a+\delta], |\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x| < \epsilon$

若积分以a为瑕点（a为上下界），那么作换元$t = \frac{1}{x-a}$即可转化为无穷积分

若瑕点n出现在中间，那积分$\int_a^b$转化为$\int_a^n + \int_n^b$两个瑕积分的和

> ✏️ **Note**
>
> 是不是以为$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$是0？现在再看看呢？

无穷积分和瑕积分的计算与定积分类似，且相对简单。方法比较唯一，就是使用牛顿-莱布尼茨公式。因此不做赘述。

> ⚡ **邪修：留数定理，考试禁止使用（~~这个也用不出来~~）**

对于有理分式的定积分，如果分母没有零点，分子为1，我们可以将它放到复平面上计算。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Res}[f(x);x_i]\text{，其中}\mathrm{Im}x_i > 0$$

其实三角函数的积分也可以用留数定理，但是表示形式比较复杂，在此不做赘述。

附录I：常见不定积分的公式速查

基础版

$\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n \Leftrightarrow \int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$(a^x)' = a^x\ln a \Leftrightarrow \int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \therefore \int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$

$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x \Leftrightarrow \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C, \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C,\text{即}\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C,\text{即}\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

进阶版

$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$
$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$