微积分I（H）期末复习

秋冬学期辅学计划

- 微积分I（H）
  - 一、函数
    - 基本函数
      - 二次函数：ax^2+bx+c
      - 指数函数：a^x
      - 对数函数：$\log_a x$
      - 三角函数：$\sin x, \cos x$
      - 反函数：$f^{-1}(x)$
    - 函数性质
      - 奇偶性：$f(-x)=\pm f(x)$
      - 周期性：$f(x+T)=f(x)$
      - 有界性：$|f(x)|\le M$
      - 连续性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
    - 极限概念
      - ε-δ定义
      - 单侧极限：$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
      - 双侧极限：$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
    - 极限运算法则：$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$
    - 极限的连续性
      - 定义
      - 几何意义
  - 二、微分学
    - 导数
      - 定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
      - 几何意义（切线斜率）
    - 求导法则
      - 基本求导公式：$(x^n)'=nx^{n-1}$
      - 四则运算法则：$(uv)'=u'v+uv'$
      - 链式法则：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
      - 隐函数求导
      - 参数方程求导
    - 微分中值定理
      - 罗尔定理
      - 拉格朗日中值定理：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
      - 柯西中值定理
    - 导数的应用
      - 单调性判断：$f'(x)>0\Rightarrow$递增，$f'(x)<0\Rightarrow$递减
      - 极值与最值
      - 凹凸性与拐点
      - 洛必达法则：$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$
  - 三、积分学
    - 不定积分
      - 原函数概念：$F'(x)=f(x)$
      - 基本积分公式：$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
      - 积分方法
        - 换元法
        - 分部积分法：$\int u dv=uv-\int v du$
        - 有理函数积分
    - 定积分
      - 黎曼和定义：$\int_a^b f(x)dx=\lim\sum f(\xi_i)\Delta x_i$
      - 牛顿-莱布尼茨公式：$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$
      - 积分的性质
        - 线性性：$\int(af+bg)=a\int f+b\int g$
        - 区间可加性：$\int_a^b+\int_b^c=\int_a^c$
    - 积分的应用
      - 平面图形面积：$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$
      - 旋转体的体积：$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$
      - 曲线的弧长：$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

1. 求曲线段$y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0\le x\le \frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长.

Proof. 弧长公式：$L=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$，其中$y'=\tan x$.

$$L=\int_0^{\pi/4}\sec x\,dx=[\ln|\sec x+\tan x|]_0^{\pi/4}=\ln(\sqrt{2}+1).$$

■

2. 求曲线$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在$(0,1)$处的切线方程.

Proof. 隐函数求导：$\cos(xy)(y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1$.
代入点$(0,1)$，解得：$y'=1$.
因此切线方程为$y=x+1$. ■

3. 计算极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

Proof. 令$t=1/x$：

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

■

4. 设$y=x^{\tan(3x)}+(\arcsin 2x)^3+\ln 5$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Proof. 设$u=x^{\tan(3x)}$，则：

$$\frac{u'}{u}=3\sec^2(3x)\ln x+\frac{\tan(3x)}{x}\implies u'=x^{\tan(3x)}\left(3\sec^2(3x)\ln x+\frac{\tan(3x)}{x}\right).$$

设$v=(\arcsin 2x)^3$，则：

$$v'=\frac{6(\arcsin 2x)^2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$\frac{dy}{dx}=u'+v'.$$

■

5. 设曲线$y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=t^3+3t+2,\\ y=t^3-3t+5\end{cases}$$

决定，求曲线的凹凸区间及拐点.

Proof. 一阶导数：$\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，二阶导数：$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$.
凹向下：$t<0$，凹向上：$t>0$.
拐点：$t=0$ 时$(x,y)=(2,5)$.

■

6. 计算不定积分：

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 首先分解分母：

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

于是：

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$$

对于第一项，分部积分：令$u = \arctan x$, $dv = \frac{1}{x^2}dx$，则：

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx.$$

其中：

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + C.$$

对于第二项：

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C.$$

因此：

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,dx = -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$$

■

7. 计算：

$$\int \frac{1}{\sin(2x) + 2\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 简化分母：$\sin 2x + 2\sin x = 2\sin x\cos x + 2\sin x = 2\sin x(\cos x + 1)$.
于是：

$$\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\,dx.$$

令$u = \tan\frac{x}{2}$，则$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2}du$。代入：

$$\frac{1}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{(1+u^2)^2}{4u}\cdot\frac{2}{1+u^2} = \frac{1+u^2}{2u}.$$

所以：

$$\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\,dx = \int \frac{1+u^2}{2u}\,du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u} + u\right) du = \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{u^2}{4} + C.$$

代回$u = \tan\frac{x}{2}$，并乘以系数：

$$\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C.$$

■

8. 记$a = \frac{\pi}{6}$，计算：

$$\int_{-a}^{a} \frac{(\sin x)^2}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 令$I = \int_{-a}^{a} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\, dx$。作代换$t = -x$，得：

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\, dx.$$

两式相加：

$$2I = \int_{-a}^{a} \sin^2 x \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{x}} \right) dx = \int_{-a}^{a} \sin^2 x\, dx.$$

因为$\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{x}} = 1$，所以：

$$I = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \sin^2 x\, dx.$$

由于$\sin^2 x$ 是偶函数：

$$\int_{-a}^{a} \sin^2 x\, dx = 2\int_{0}^{a} \sin^2 x\, dx = 2\int_{0}^{a} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \int_{0}^{a} (1-\cos 2x)\, dx = a - \frac{\sin 2a}{2}.$$

因此：

$$I = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\sin 2a}{2} \right) = \frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4}.$$

代入$a = \frac{\pi}{6}, \sin 2a = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$I = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

■

9. 求曲线$y = e^{\frac{1}{|x|}} \arctan \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$ 的间断点和渐近线.

Proof. 函数为$y = e^{\frac{1}{|x|}} \arctan \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$。
间断点：$x = 0, x = 1, x = 2$.
渐近线：
(i) 水平渐近线：当$x \to \pm\infty$，$y \to 0$，故$y = 0$ 是水平渐近线.
(ii) 垂直渐近线：在$x = 0$ 处，左右极限均为无穷，故$x = 0$ 是垂直渐近线；在$x = 1$ 和$x = 2$ 处极限有限，无垂直渐近线.

■

10. 证明不等式：

$$1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Proof. 定义函数：$f(x) = 1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.
目标是证明$f(x) \geq 0$ 对所有$x \in \mathbb{R}$ 成立。
注意到：

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arsinh}(x).$$

计算导数：

$$f'(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

即：

$$f'(x) = \operatorname{arsinh}(x).$$

在$x=0$ 处：

$$f(0)=1+0\cdot\ln(1)-1=0$$

由于$\operatorname{arsinh}(x)$ 是奇函数，且当$x>0$ 时，$\operatorname{arsinh}(x)>0$.故$f'(x)>0$ 对$x>0$，即$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调递增。因此，对$x>0$，有$f(x)>f(0)=0$.
又由于$f(x)$ 是偶函数，故对任意$x\in\mathbb{R}$，有$f(x)\geq 0$，等号仅在$x=0$ 时成立. ■

11. 设a,b均为常数，$a>-2, a\neq 0$，求a,b使得：

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 给定方程：

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\int_0^1\ln(1-x^2)\,dx.$$

右端积分计算得$2\ln 2-2$。
左端被积函数化简为$\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}$.积分收敛要求$b=a$，此时被积函数为$\frac{a}{x(2x+a)}$.
积分得：

$$\int_1^{\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln\frac{2+a}{2}.$$

令等于右端：

$$\ln\frac{2+a}{2}=2\ln 2-2\implies\frac{2+a}{2}=4e^{-2}\implies a=8e^{-2}-2.$$

故$a=b=8e^{-2}-2$. ■

12. 求方程$(\ln x)^4-4\ln x+4x=k$ 的不同实根的个数，其中k为实数.

Proof. 方程$(\ln x)^4-4\ln x+4x=k$，令$u=\ln x$，则$h(u)=u^4-4u+4e^u$.
求导$h'(u)=4(u^3-1+e^u)$.$h'(u)=0$ 当$u=0$，且$h(u)$ 在$u=0$ 处取极小值$h(0)=4$.
当$u\to\pm\infty$，$h(u)\to+\infty$.故：
(i) 若$k<4$，无实根；
(ii) 若$k=4$，有唯一实根$x=1$；
(iii) 若$k>4$，有两个实根.

■

13. 在第一象限内求曲线$y=-x^2+1$ 上一点，使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的面积最小，并求此最小面积.

Proof. 设切点为$P(a,1-a^2)$，$a\in(0,1)$。切线斜率为$-2a$，方程为：

$$y=-2ax+a^2+1.$$

与坐标轴交点为$A(0,a^2+1)$ 和$B\left(\frac{a^2+1}{2a},0\right)$。切线与坐标轴围成三角形面积：

$$S_\triangle=\frac{(a^2+1)^2}{4a}.$$

曲线与坐标轴围成区域面积为$\frac{2}{3}$。所求面积为：

$$S(a)=S_\triangle-\frac{2}{3}=\frac{a^3}{4}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4a}-\frac{2}{3}.$$

求导：

$$S'(a) = \frac{3a^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4a^2}.$$

令$S'(a) = 0$：

$$3a^4 + 2a^2 - 1 = 0 \implies a^2 = \frac{1}{3} \implies a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

切点为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$，最小面积：

$$S_{\min} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{9}.$$

■

14. 已知函数$f(x)$在$[a,c]$上二阶可导，且$a < b < c$，证明：存在$\xi \in (a,c)$使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-b)(c-a)} = \frac{1}{2}f''(\xi).$$

Proof. 考虑函数$f(x)$ 在点a, b, c（其中$a < b < c$）上的拉格朗日插值多项式$L(x)$，即$L(x)$ 满足$L(a) = f(a)$, $L(b) = f(b)$, $L(c) = f(c)$。$L(x)$ 可表示为

$$L(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

其二次项系数为：

$$C = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

且$L''(x) = 2C$.
定义误差函数$h(x) = f(x) - L(x)$.由于$L(x)$ 插值$f(x)$ 于点a, b, c，有$h(a) = h(b) = h(c) = 0$，根据Rolle 定理，在区间(a,b) 内存在η_1 使得$h'(\eta_1) = 0$，在区间(b,c) 内存在η_2 使得$h'(\eta_2) = 0$.
对$h'(x)$ 在区间$[\eta_1, \eta_2]$ 上再次应用Rolle 定理，存在$\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a,c)$ 使得$h''(\xi) = 0$.
由于$h''(x) = f''(x) - L''(x)$，有：

$$f''(\xi) = L''(\xi) = 2C.$$

代入C 即得：

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-b)(c-a)} = \frac{1}{2}f''(\xi).$$

故存在$\xi \in (a,c)$ 使得等式成立. ■