微积分 (H) 春六周辅学

——级数部分

作者：强数 2401-应凯诚
组织：数学科学学院
时间：2026.4.6

ElegantLATEX Program

目录

第 1 章 数项级数

1.1 级数的基本概念与性质

1.1.1 定义与性质

对于无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$，我们关注其是否收敛。

定义 1.1

设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 为级数的前 n 项部分和。

- 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$（有限数），则称级数收敛，和为 S。
- 若极限不存在或为 ∞，则称级数发散。

♣

定理 1.1 (必要条件)

若级数 $\sum u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。反之不一定成立（如调和级数）。

♡

定理 1.2 (Cauchy 收敛准则)

级数 $\sum u_n$ 收敛 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$，有：

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$$

♡

定义 1.2 (组合级数)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个组合级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加括号得到，即

$$v_k = u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}$$

♣

定理 1.3

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其组合级数收敛到同一个值。

♡

1.1.2 常见级数示例

- **几何级数** $\sum aq^{n-1}$：当 $|q| < 1$ 时收敛至 $\frac{a}{1-q}$；当 $|q| \geq 1$ 时发散。
- **调和级数** $\sum \frac{1}{n}$：发散。可以通过 Cauchy 准则证明 $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$。
- **Basel 问题**：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$。欧拉通过 $\frac{\sin x}{x}$ 的无穷乘积展开给出了著名的证明。

定理 1.4 (Basel 问题)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

♡

证明 欧拉给出了如下证明 (暂时忽略这背后的严谨性)

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2})$$

比较两边 x^2 系数可知

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

即可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

笔记 后面我们也可以用傅里叶分析的方法证明。

例题 1.1 已知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

(1) 求 $f'(x)$ 的表达式。

(2) 证明:

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}\quad(0<x<1).$$

例题 1.2 记

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\qquad u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

(1) 证明：当 $n\geq 2$ 时，有 $0<a_n<1+\ln n$; (2) 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，并求其和。

1.2 正项级数的判别法

对于 $u_n \geq 0$ 的级数，收敛的充要条件是部分和序列 $\{S_n\}$ 有界。

定理 1.5

设 $u_n, v_n \geq 0$：

1. 若 $u_n \leq v_n$ 且 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛。
2. 极限形式：若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$。
   - $0 < l < \infty$：二者同敛散。
   - $l = 0$：$\sum v_n$ 收敛 $\implies \sum u_n$ 收敛。
   - $l = \infty$：$\sum v_n$ 发散 $\implies \sum u_n$ 发散。

♡

例题 1.3 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛。

定理 1.6 (比值法 (d'Alembert) 与根值法 (Cauchy))

设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = r$：

- $r < 1$：收敛。
- $r > 1$：发散。
- $r = 1$：失效（需进一步判别）。

♡

定理 1.7 (比值比较法)

设 $u_n > 0, v_n > 0$，若存在正整数 N，使得对所有 $n \geq N$ 都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

则：

- 若 $\sum v_n < \infty$ (收敛)，则 $\sum u_n$ 收敛。
- 若 $\sum u_n = \infty$ (发散)，则 $\sum v_n$ 发散。

♡

1.3 进阶判别法

定理 1.8 (积分判别法)

若 $f(x)$ 在 $[1, \infty)$ 上非负且单调递减，则级数 $\sum f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 同敛散。

♡

例题 1.4 p**-级数** $\sum \frac{1}{n^p}$：$p > 1$ 收敛，$p \leq 1$ 发散。

例题 1.5 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$:$p > 1$ 收敛，$p \leq 1$ 发散。

例题 1.6 设 $0 < p < 1, a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^p}, n = 1, 2, \cdots$,, 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

定理 1.9 (Raabe 判别法)

设 $R_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$，若 $\lim_{n\to\infty} R_n = r$：

- $r > 1$：收敛。
- $r < 1$：发散。

♡

推论 1.1 (Raabe 判别法极限形式)

设 $u_n > 0$，若 $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r$。

- $r > 1 \implies \sum u_n$ 收敛。
- $r < 1 \implies \sum u_n$ 发散。

例题 1.7 判断 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$ 的敛散性。

解法 (Raabe 法)： 记 $u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$，则

$$\begin{aligned} R_n &= n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{2n+1} - 1\right) \\ &= n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) \\ &= n\left(\frac{4n^2+10n+6-(4n^2+4n+1)}{(2n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

取极限 $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$，故级数收敛。

解法 (不等式放缩)： $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$，得到 $(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!})^2 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2n+1}$，$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，故：

$$u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^{3/2}} \sim O(n^{-3/2})$$

由于 $p = \frac{3}{2} > 1$，p-级数收敛，故原级数收敛。

例题 1.8 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{1/2})(2-x^{1/3}) \cdots (2-x^{1/n})$ 的敛散性 $(x > 0)$。

解： 记一般项为 u_n，考察比值：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2-x^{1/(n+1)}}$$

利用 Raabe 判别法计算极限：

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x^{1/(n+1)}-1}{2-x^{1/(n+1)}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-x^{1/(n+1)}} \cdot \frac{x^{1/(n+1)}-1}{1/n} \\ &= 1 \cdot \ln x = \ln x \end{aligned}$$

由 Raabe 判别法：

- 若 $\ln x > 1 \implies x > e$，级数收敛。
- 若 $\ln x < 1 \implies x < e$，级数发散。

当 $x = e$ 时，Raabe 判别法失效。此时将比值进行 Taylor 展开：

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{1}{2-e^{1/(n+1)}} = \frac{1}{1-(e^{1/(n+1)}-1)} \\ &= 1 + (e^{1/(n+1)}-1) + (e^{1/(n+1)}-1)^2 + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

对照 Gauss 判别法形式，此时 $\lambda = 1 \le 1$，因此级数当 $x = e$ 时发散。

定理 1.10 (Gauss 判别法—一般情形)

设 $u_n > 0$，若能展开为：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\nu}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

- 若 $\nu > 1$，则 $\sum u_n$ 收敛。
- 若 $\nu \leq 1$，则 $\sum u_n$ 发散。

♡

推论 1.2 (Gauss 判别法特殊形式)

设 $u_n > 0$，若：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- 若 $\lambda > 1$，级数收敛。
- 若 $\lambda \leq 1$，级数发散。

♡

笔记 以上判别法均可视为比值比较判别法，若再考虑

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p} \cdots$$

等比较级数，可得到更精细的判别，但实际一般用得不多。所以，我们需要熟悉的是常见正项级数的阶。并且，使用特定比较级数得到的比较判别法能力总是有限的，如下定理告诉我们，不存在万能的比较级数。

定理 1.11

1. (Du Bois-Reymond) 给定收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，一定存在收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
2. (Abel) 给定发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，一定存在发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

♡

1.4 变号级数

定义 1.3

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$，称级数 $\sum u_n$ 绝对收敛 (A.C)。
2. 若 $\sum u_n$ 收敛，而 $\sum |u_n| = \infty$，称其为 条件收敛 (C.C)。
3. 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (其中 $u_n \geq 0$) 的级数称为 交错级数。

♣

定理 1.12 (Leibniz 判别法)

若 $\{u_n\}$ 单调递减趋于 0，则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 收敛。

♡

证明 [证明概述] 考察部分和 S_n：

$$S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n-1} - u_{2n} \geq 0$$
$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -u_{2n} + u_{2n+1} \leq 0$$

且 $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$。故 S_{2n} 单调递增且有上界，故 S_{2n} 收敛。同理可证 S_{2n+1} 收敛，且 $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \to 0$，故 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。

例题 1.9 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性。

- 当 $p > 1$ 时，绝对收敛。
- 当 $0 < p \leq 1$ 时，条件收敛。

1.4.1 Abel 变换与判别法

Abel 求和公式 (分部求和法)：设 $S=\sum_{k=1}^{m}a_kb_k$，记 $B_j=\sum_{k=1}^{j}b_k$ 且 $B_0=0$。则：

$$S=a_mB_m+\sum_{k=1}^{m-1}B_k(a_k-a_{k+1})$$

引理 1.1 (Abel 引理)

若满足：$\{a_k\}$ 单调；$\{B_k\}$ 有界，即 $\exists M>0,|B_k|\le M$。则 $|S|\le M(|a_1|+2|a_m|)$。♡

证明 $|S|\le|a_mB_m|+\sum_{k=1}^{m-1}|B_k||a_k-a_{k+1}|\le M\left(|a_m|+\sum_{k=1}^{m-1}|a_k-a_{k+1}|\right)$。因 a_k 单调，$\sum|a_k-a_{k+1}|=|a_1-a_m|$，故结论成立。

定理 1.13 (Abel 判别法)

若 $\sum b_n$ 收敛，且数列 $\{a_n\}$ 单调有界，则 $\sum a_nb_n$ 收敛。♡

定理 1.14 (Dirichlet 判别法)

若 $\sum b_n$ 的部分和 B_n 有界，数列 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum a_nb_n$ 收敛。♡

例题 1.10 判断级数 $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)(3-\arctan n)$ 的敛散性。

- 由 Leibniz 判别法，$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛。
- 由 Abel 判别法，因 $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 单调有界，$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 收敛。
- 再次使用 Abel 判别法，因 $(3-\arctan n)$ 单调有界，故原级数收敛。

例题 1.11 数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 当 $x\neq k\pi$ 时条件收敛

例题 1.12 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x^{2025}}\,dx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{1+n^2}$ 的收敛性。

1.5 收敛变号级数的性质

定义 1.4

记 $u_n^+=\begin{cases}u_n, & u_n\ge 0\\ 0, & u_n<0\end{cases}$，及 $u_n^-=\begin{cases}-u_n, & u_n\le 0\\ 0, & u_n>0\end{cases}$。

u_n^+ 和 u_n^- 均为正项级数，分别称为 $\sum u_n$ 的正部和负部。显然有 $u_n=u_n^+-u_n^-$，且 $|u_n|=u_n^++u_n^-$。♣

定理 1.15

1. 若 $\sum u_n$ A.C.，则 $\sum u_n^+$ 与 $\sum u_n^-$ 皆收敛。
2. 若 $\sum u_n$ C.C.，则 $\sum u_n^+$ 与 $\sum u_n^-$ 皆发散。

♡

证明 利用 $0\le u_n^{\pm}\le|u_n|$，若绝对收敛，由比较判别法知正部负部均收敛；若条件收敛，由于 $u_n^++u_n^-=|u_n|$ 发散且 $u_n^+-u_n^-=u_n$ 收敛，正负部必须同时发散。

定理 1.16

若 $\sum u_n$ A.C.，则其任意重排级数也绝对收敛，且和不变。♡

定理 1.17 (Riemann 重排定理)

若 $\sum u_n$ 条件收敛 (C.C.)，则对任意实数 $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$，必存在 $\sum u_n$ 的一种重排 $\sum v_n$，使得 $\sum v_n=\alpha$。♡

例题 1.13 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^+}{\sum_{k=1}^{n} a_k^-}=1$$

例题 1.14 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ 收敛。(Hint: 利用重排)

1.6 其他判别法

定理 1.18 (Cauchy 凝聚判别法)

$\{u_n\}$ 是单调减少的正数，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是凝聚项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$$

收敛

例题 1.15 设 $\{a_n\}$ 为单调减少的正数列。

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛。

(2) 若 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\rho$，证明当 $\rho<\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，当 $\rho>\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

定理 1.19 (Sapagof 判别法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 S_n, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 同敛散

定理 1.20 (对数判别法)

1. 对正项级数 $\sum u_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=r$$

，则当 $r>1$ 时级数收敛，$r<1$ 时级数发散。

2. 对正项级数 $\sum u_n$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{nu_n}}{\ln\ln n}=r$$

，则当 $r>1$ 时级数收敛，$r<1$ 时级数发散。

第 1 章 练习

1. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛。
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n+(-2)^n}$ 敛散性?
3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 敛散性?
4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln)^{\ln\ln n}}$ 敛散性?
5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，S_n 为其部分和序列，$p>1$, 证明：无论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛与否，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 总是收敛的。
6. $a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛并求其和。

第 2 章 幂级数与 Taylor 级数

2.1 幂级数的基本概念

定义 2.1 (幂级数)

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

的无穷级数称为以 x_0 为中心的幂级数。

问题：幂级数的收敛域如何确定？

记 $r = \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,+\infty]$，令

$$R = \begin{cases} +\infty & r = 0 \\ \frac{1}{r} & 0 < r < +\infty \\ 0 & r = +\infty \end{cases}$$

定理 2.1 (Cauchy-Hadamard)

对于幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$：

1. 当 $R = +\infty$ 时，该幂级数在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛；
2. 当 $0 < R < +\infty$ 时，该幂级数在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上绝对收敛，在 $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$ 上发散；
3. 当 $R = 0$ 时，该幂级数仅在 x_0 处收敛。

定义 2.2 (收敛半径)

上述定理中的 R 称为幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径。

例题 2.1 当收敛半径 $R = 1$ 时，收敛区间的不同边界情况示例：

1. $\sum x^n$，收敛域为 $(-1, 1)$；
2. $\sum \frac{x^n}{n}$，收敛域为 $[-1, 1)$；
3. $\sum \frac{x^n}{n^2}$，收敛域为 $[-1, 1]$。

例题 2.2 设

$$a_n = \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)(4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)(4n+1)}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

求幂级数 $x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{4n+1}$ 的收敛半径和收敛域。

定理 2.2

若极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \in [0,+\infty]$ 存在，则收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$（约定 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$）。

注 关于极限之间的不等式关系：

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

这就类似于序列的极限关系：$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$。

例题 2.3 求下列幂级数的收敛半径：

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$

例题 2.4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} (x - \frac{1}{2})^n$ 收敛半径与收敛域。

2.2 幂级数的核心性质

定理 2.3 (广义一致收敛性)

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛区间为 I，且 $I \neq \{x_0\}$，则它在 I 上内闭一致收敛（广义一致收敛）。

证明 任取闭区间 $[a, b] \subset I$，只需证级数 $\sum a_n (x - x_0)^n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。我们可做如下恒等变形：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (b - x_0)^n \cdot \left(\frac{x - x_0}{b - x_0} \right)^n$$

由于常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b - x_0)^n$ 收敛（因其在收敛域内），故一致收敛；而函数列 $\left\{ \left(\frac{x - x_0}{b - x_0} \right)^n \right\}$ 在 $x \in [a, b]$ 上关于 n 单调且一致有界。由 Abel 判别法可知，原级数在 $[a, b]$ 上一致收敛。

定理 2.4 (逐项积分)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 收敛区间为 I，和函数为 $S(x)$。则其在 $\forall [a, b] \subset I$ 上可积，且可以逐项积分：

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n dx$$

进一步地，含有变上限的积分形式为：

$$\int_{x_0}^{x} S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^{n+1}$$

结论：逐项积分后的新级数，其收敛半径 $R' = R$。

例题 2.5 利用逐项积分性质：

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

定理 2.5 (逐项求导)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛半径 $R > 0$，和函数为 $S(x)$ $(x \in I)$。对其逐项求导得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$，其收敛区间设为 $I' \subset I$。则 $S(x)$ 在 I' 上可导，且：

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

推论 2.1 (无穷可导性)

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛半径 $R > 0$，则和函数 $S(x) \in C^{\infty}(x_0 - R, x_0 + R)$，且存在任意高阶导数：

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}$$

2.3 经典例题与推导

例题 2.6 求以下幂级数的和函数：

1. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$。求导可得：

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$$

积分还原（由连续性及 $S(0)=0$）：

$$S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(x+1),\quad x\in(-1,1]$$

2. 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$。求导可得：

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1)$$

积分还原：

$$S(x)=\arctan x,\quad x\in[-1,1]$$

例题 2.7 计算数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)2^{-n}$ 的和。

解： 原级数可拆分为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)2^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)2^{-n}-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$$

我们先构建相关的辅助幂级数。已知：

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'\quad\text{或写为}\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\left(\frac{2x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1)$$

代入 $x=\frac{1}{2}$，对于第一部分：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\cdot2^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1-1/2)^3}=\frac{1}{2}\cdot16=8$$

第二部分为等比级数求和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=1$$

故最终结果为：$8-1=7$。

例题 2.8 幂级数解微分方程 证明幂级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足常微分方程 (ODE) $xy''+y'-y=0$。

解： 易知该级数收敛半径 $R=\infty$，故 $y(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$。逐项求导得：

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2}$$

代入微分方程的左边展开：

$$\begin{aligned}xy''+y'-y&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2}+\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}+\frac{1\cdot x^0}{(1!)^2}\right)-\left(\frac{x^0}{(0!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\right)\end{aligned}$$

化简常数项（x^0 项）：$\frac{1}{(1!)^2}-\frac{1}{(0!)^2}=1-1=0$。

对于 x^{n-1} 项的系数（其中 $n \geq 2$），前两项系数相加为：

$$\frac{n(n-1)}{(n!)^2}+\frac{n}{(n!)^2}=\frac{n^2}{(n!)^2}=\frac{n^2}{n^2\cdot((n-1)!)^2}=\frac{1}{((n-1)!)^2}$$

而第三项中的级数可平移下标，将 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 变为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{((n-1)!)^2}$。因此，各项系数严格抵消为 0，证明完毕。

2.4 Taylor 级数

对于函数 $f(x)$，带有 Peano 余项的 Taylor 展开为：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

思考：为什么在 x_0 处与前 n 阶导数相同的多项式可以用来逼近 $f(x)$？前提是 $f\in C^{\infty}((x_0-\delta,x_0+\delta))$。但是，仅有无穷阶可导并不足以保证 Taylor 级数收敛于自身。

例题 2.9 非解析的光滑函数 构造如下函数：

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

可以证明 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 且在 $x=0$ 处的所有导数均为 0。其 Taylor 级数恒为 0，但在 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$。

问题：何时 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 成立？

回答：设 $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 为 Taylor 余项，当且仅当 $R_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$ 时成立。

定理 2.6

若函数列 $\{f^{(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在邻域 $N(x_0,\delta)$ 上一致有界，则：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in N(x_0,\delta)$$

♡

证明 由题意，$\exists M>0$，使得 $\forall n\in\mathbb{N}$ 及 $\forall x\in N(x_0,\delta)$，均有 $|f^{(n)}(x)|\leq M$。利用 Lagrange 余项：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leq M\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}=0$，故 $|R_n(x)|\to 0$。

例题 2.10 1. 设 $f(x)=e^x$，则 $f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1$。对于 $\forall\delta>0, x\in N(0,\delta)$，有 $|f^{(n)}(x)|\leq e^{\delta}$（一致有界）。因此 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R})$。

2. 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$。显然 $|f^{(n)}(x)|\leq 1, |g^{(n)}(x)|\leq 1$。因此：

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}$$

例题 2.11 对数函数的展开 展开函数 $\ln(1-x-2x^2)$。

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln((1-2x)(x+1))=\ln(1-2x)+\ln(x+1)$$

$$\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n}\quad\left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(x\in(-1,1])$$

相加合并得：

$$\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$$

收敛区间为公共部分 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。注：若直接对原函数分析其在实数轴的定义域 $(1-2x)(x+1)>0\implies x\in(-1,\frac{1}{2})$，

其几何中心为 $-\frac{1}{4}$。幂级数的收敛区间关于展开点对称。

此外，利用对数展开可得重要级数：

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}, \quad x\in(-1,1)$$

2.5 Stirling 公式与边界收敛性分析

定理 2.7 (Stirling 公式)

当 $n\to\infty$ 时，有：

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0<\theta_n<1$$

♡

证明 [核心推导思路] 构造数列 $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$，考察其比值：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}\cdot\frac{(n+1)^{n+1+1/2}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}}{e}$$

取对数得 $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$。利用 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的展开式，令 $x=\frac{1}{2n+1}$，则 $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{n}$：

$$\begin{aligned}(n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \frac{2n+1}{2}\cdot 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2m+1}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\frac{1}{(2n+1)^{2m}}\end{aligned}$$

显然该级数首项为 1，故 $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>0$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递减。进一步放缩可证：

$$1<(n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)} = 1+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}$$

这表明 $\ln(a_n e^{-\frac{1}{12n}})$ 是单调递增的。结合单调有界定理，$\lim_{n\to\infty}a_n = a$ 存在。最后结合 **Wallis** 公式 $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}\right)$ 可求得极限常数 $a=\sqrt{2\pi}$。

例题 2.12 收敛区间与端点敛散性 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}X^n$ 的收敛区间。

解： 使用达朗贝尔判别法考察系数 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$：

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=4$，故收敛半径 $R=4$，内部收敛域为 $(-4,4)$。

当 $X=4$ 时，考察级数 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ 的通项，利用 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$：

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n \sim \frac{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot 4^n = \frac{2\pi n}{\sqrt{4\pi n}}\cdot\frac{n^{2n}}{(2n)^{2n}}\cdot 4^n = \sqrt{\pi n}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}a_n4^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi n}\neq 0$，通项不趋于零，故在端点 $X=4$ 处发散。同理在 $X=-4$ 处发散。

第 2 章 练习

1. **求下列幂级数的收敛区间:**

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^{3n}}{n!}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\ln(1+n)}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n},\quad (a,b>0)$

2. **求下列级数的和函数:**

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$

   (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$

3. **求以下级数的和函数:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

4. **求常数项级数的和:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!+(n+1)!}$$

5. **求常数项级数的和:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}$$

6. **求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数，并求以下数值级数的和:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^n}$$

7. **求幂级数** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ **的收敛域及和函数** $S(x)$。

8. **将下列函数展开为** x **的幂级数 (Maclaurin 级数):**

   (a) 2^x

   (b) $\arcsin x$

   (c) $\frac{x}{1-3x+2x^2}$

   (d) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

第 3 章 Fourier 分析

3.1 Fourier 系数

Fourier 级数是一类特殊的三角级数，它的特殊性在于其系数是从某个可积函数出发，经过 Euler-Fourier 公式计算出来的。

3.1.1 Fourier 系数的计算公式

设 f 是以 2π 为周期的函数，且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积（和绝对可积）。计算 f 的 Fourier 系数的 **Euler-Fourier 公式**为：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

如果三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 中的系数满足上述公式，则称该三角级数是 f 的 **Fourier 级数**，记为：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{3.3}$$

注 记号 “$\sim$” 仅表明右边的系数 a_n, b_n 与左边的函数 f 之间满足积分计算关系。公式 (3.3) 右边的级数是否收敛，以及收敛时其和函数是否等于 $f(x)$，需要依赖如 Dirichlet 条件等另行讨论。

命题 3.1

一致收敛的三角级数，必是其和函数的 Fourier 级数。

注

1. **延拓：**当 f 的定义域是某个长度为 2π 的区间时，可先将其延拓成周期函数再展开。
2. **偶函数 (余弦级数)：**若 f 为偶函数，则所有 $b_n = 0$，且有：
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
求余弦级数做偶延拓。
3. **奇函数 (正弦级数)：**若 f 为奇函数，则所有 $a_n = 0$，且有：
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$
求正弦级数做奇延拓。

3.2 Fourier 级数的收敛性

定理 3.1 (Fejer 定理)

如果以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积，并且在点 x_0 处有左、右极限 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$，则 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处在 Cesàro 意义下收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].$$

特别是当 f 于点 x_0 连续时，则 Fourier 级数在点 x_0 的 Cesàro 和就等于 $f(x_0)$。

命题 3.2

设以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积，点 x_0 是 f 的连续点或第一类间断点。如果 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛，则它一定收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].$$

3.2.1 Fourier 系数的几何意义

定义 3.1

称函数列 $\{f_n\}$ 于区间 $[a,b]$ 上平方平均收敛于 f，若成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\,dx=0.$$

Fourier 系数看似纯粹的积分运算，实则有着极深的几何背景。我们将周期为 2π 的可积平方函数集合视为一个**内积空间**。引进正交概念：如果

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx=0$$

就称 f 和 g **正交**。在这个定义下，三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ 中任意两个不同函数均正交，构成 **正交函数系**。

我们考虑用 n 次三角多项式：

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

来逼近函数 $f(x)$，按“平方平均意义”定义逼近误差（距离的平方）：

$$d^2(f,T_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx$$

命题 3.3 (Fourier 系数的最优性)

设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积和平方可积函数，$T_n(x)$ 是任意 n 次三角多项式，$S_n(x)$ 是 f 的 Fourier 级数的部分和：

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

则有 $d^2(f,S_n)\le d^2(f,T_n)$，等号成立当且仅当 $A_0=a_0, A_k=a_k, B_k=b_k\ (k=1,\dots,n)$。

证明 直接按照定义计算，并利用三角函数系的正交性展开配方：

$$\begin{aligned}
2\pi d^2(f,T_n) &= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi a_0A_0 - 2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k) + \frac{\pi A_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \\
&\quad + \pi\left\{\frac{(A_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[(A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right]\right\} \\
&\geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) = 2\pi d^2(f,S_n)
\end{aligned}$$

当且仅当平方项全部为 0 时，取等号。

注 Euler-Fourier 公式在几何上代表了 f 到三角函数基底上的**正交投影**。而 S_n 就是 f 投影到所有 T_n 构成的线性子空间上的垂足，由勾股定理（或投影定理）可知，S_n 必然是距离 f 最近的点。

定理 3.2 (Bessel 不等式)

若 f 于区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积，且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则有：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx \tag{3.4}$$

♡

证明 由最优性的证明过程可知，无论 n 取何值，距离平方 $2\pi d^2(f,S_n)\geq 0$，即：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq 0$$

移项并令 $n\to\infty$，即得 Bessel 不等式。由于该正项级数的部分和有上界，故级数收敛。

注

1. 由 Bessel 不等式级数收敛可知，通项必然趋于零，即 $\lim_{n\to\infty}a_n=0,\lim_{n\to\infty}b_n=0$（Riemann-Lebesgue 引理的最直接推论）。
2. 由此可知，当 $0<p\leq\frac{1}{2}$ 时，三角级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 不可能是任何平方可积函数（L^2 空间）的 Fourier 级数，因为其系数平方和 $\sum\frac{1}{n^{2p}}$ 在 $2p\leq 1$ 时是发散的。

从 Bessel 不等式的证明已知

$$2\pi d^2(f,S_n)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

因此，若 $\lim_{n\to\infty}d^2(f,S_n)=0$，则 Bessel 不等式中的不等号就可换为等号。这就是 Parseval（帕塞瓦尔）等式，它又称为封闭性方程，是 Fourier 级数中最重要的公式之一。

命题 3.4 (Parseval 等式)

设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积，且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则有下列 Parseval 等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

♠

例题 3.1 证明：任意三角多项式 $P_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$ 的 Fourier 级数就是其本身。

证明： 设 $P_n(x)$ 的 Fourier 系数为 a_m,b_m。由积分的正交性：

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\cos mx\,dx=\begin{cases}A_m, & 0\le m\le n\\ 0, & m>n\end{cases}$$

同理 $b_m=B_m\ (m\le n)$，且 $b_m=0\ (m>n)$。因此 $P_n(x)$ 展开后仍为原级数。这也验证了一致收敛的三角级数必为其自身和函数的 Fourier 级数。

第 3 章 练习

1. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ x^2, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

的 Fourier 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x$，$S(x)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，则 $S\left(\frac{7}{2}\right)=(\quad)$

A. $\frac{1}{8}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{8}$

2. 将函数 $f(x)=x-1\quad(0\le x\le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

3. 将 $f(x)=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展成正弦级数。