

# 多元函数微分学

## 春夏学期辅学计划

### May 2026

#### 1 多元函数的极限和连续

##### 1.1 多元函数的极限

定义 1.1 设  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , 映射  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  称为  $n$  元函数, 记为:

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{x} \in D$$

特别地, 二元函数  $z = f(x, y), (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

例: 【H23-24】

求极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{xy}$

练习: 【甲 22-23】

求极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y \ln(x^2+y^2)$

##### 1.2 累次极限和重极限

定义 1.2 (重极限). 设  $\mathbf{x}_0$  是  $D$  的聚点, 若  $\exists A \in \mathbb{R}$  满足:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in D \cap U^c(\mathbf{x}_0; \delta), |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$$

则称  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A$

定义 1.3 (累次极限). 设  $E_x, E_y \subseteq \mathbb{R}$ , 定义:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in E_y \setminus \{y_0\}, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y) \\ \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = L \end{cases}$$

类似定义另一顺序的累次极限

定理 1.1 (极限关系) 若重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$  与累次极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$

均存在, 则二者相等

推论 1.1.1 当重极限与两个累次极限均存在时, 三者相等。

推论 1.1.2 当两个累次极限存在但不相等, 则重极限不存在

例 2: 设  $f(x, y)$  在原点  $O$  的某邻域内有定义, 则下面命题不正确的是:

- A.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y), \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  有可能三者恰有两个存在。
- B.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y), \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  有可能三者恰有一个存在。
- C. 若  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  都存在, 则它们必然相等。
- D. 若  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  都存在, 则它们必然相等。

### 1.3 多元函数的连续性

定义 1.4 (连续性) 设  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  为开集,  $\mathbf{x}_0 \in D$ , 若

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

则称  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  处连续。若  $f$  在  $D$  每点连续, 则称  $f \in C(D)$ 。

定理 1.2 (有界闭集上连续函数的性质). 设  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  为有界闭集,  $f \in C(D)$ , 则:

1. 有界性:  $\exists M > 0, \forall \mathbf{x} \in D, |f(\mathbf{x})| \leq M$

2. 最值定理:  $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$  使得

$$f(x_1) = \inf_D f, \quad f(x_1) = \sup_D f$$

3. 介值定理 ( $D$  道路连通时) :

$$\forall \eta \in [\min f(D), \max f(D)], \exists \xi \in D, f(\xi) = \eta$$

## 2. 多元函数微分学

### 2.1 偏导数与全微分

定义 2.1 (偏导数) 设  $z=f(x,y)$  在  $(x_0,y_0)$  某邻域有定义, 若极限

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称为  $f$  在  $(x_0, y_0)$  对  $x$  的偏导数。类似定义  $f'_y$ 。

定义 2.2 (全微分) 若存在  $A, B \in \mathbb{R}$  使得

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

则称  $f$  在  $(x_0, y_0)$  可微, 全微分为  $dz = A dx + B dy$ 。

定理 2.1 (可微性条件)

1. 可微  $\rightarrow$  连续且偏导存在

2. 偏导连续  $\rightarrow$  可微

3. 充要条件

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta z - (f'_x \Delta x + f'_y \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

例: 叙述函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  处可微的定义, 并研究函数  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

在 origin 处的可微性

例:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{2022}y}{x+y} & (x^2+y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2+y^2 = 0) \end{cases}$

(1) 求  $f(x,y)$  在  $(0, 0)$  处的偏导数

(2) 据理说明  $f(x,y)$  在  $(0, 0)$  处是否连续

练习: 【H23-24】  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(1) 求  $f'_x(0,0)$  及  $f'_y(0,0)$

(2) 证明:  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  处不可微

## 2.2 微分法则

定理 2.2 (链式法则) 设  $z=f(u,v), u=u(x,y), v=v(x,y)$ , 当  $f$  可微且  $u,v$  可偏导时:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

定理 2.3 (一阶微分形式不变性) 无论  $u,v$  是自变量还是因变量, 微分形式

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

恒成立

例: 设函数  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  是由方程  $z = x^2 + y^2$  和  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dx}$

### 2.3 高阶微分

定义 2.3 (高阶偏导) 二阶偏导数定义为:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

当混合偏导连续时:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

例: 【H24-25】 已知函数  $z = e^{x+2y}$ , 则  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} =$  \_\_\_\_\_

例: 设  $u = f(x, y)$  有连续的二阶偏导数, 引用新的自变量  $s = x + y$ ,  $t = x - y$  化简方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

练习: 【甲 23-24】

已知函数  $z = \arctan \frac{y}{x}$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,0)} =$  \_\_\_\_\_,  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(2,0)} =$  \_\_\_\_\_

## 2.4 隐函数定理

定理 2.4 (隐函数存在唯一性定理) 设函数  $F(x,y)$  满足下列条件:

1. 在以  $(x_0, y_0)$  为内点的某一区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上连续;
2.  $F(x_0, y_0) = 0$  (通常称为初始条件);
3. 在  $D$  上存在关于  $y$  的连续偏导数  $F'_y(x, y)$ ;
4.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

则在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域  $U \subset D$  内, 方程  $F(x, y) = 0$  唯一地确定了一个定义在某区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内的函数  $y = f(x)$ , 使得

1.  $f(x_0) = y_0$ , 且当且仅当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时,  $F(x, f(x)) = 0$ ;
2.  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内连续。

例:

设  $z = z(x, y)$  是由方程  $yz^3 - xz^4 + z^5 = 1$  所确定的隐函数, 求  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)}$ ,  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(0,0)}$

## 2.5 方向导数与梯度

定义 2.4 (方向导数) 沿单位向量  $l = (\cos\alpha, \cos\beta)$  的方向导数为:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \rho l) - f(\mathbf{x})}{\rho}$$

当  $f$  可微时:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot l = f'_x \cos \alpha + f'_y \cos \beta$$

定义 2.5 (梯度) 梯度向量

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

方向导数最大的方向即为梯度方向, 最大值为 $\|\nabla f\|$

例: 【H23-24】已知函数  $f(x,y,z)=2xy-z^2$  及点  $A(2,-1,1), B(3,1,-1)$ , 则函数  $f(x,y,z)$

在点 A 处沿由 A 到 B 方向  $\vec{n}$  的方向导数  $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right|_A = \underline{\hspace{2cm}}$

例: 试讨论函数  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  在点  $O(0,0,0)$  处的偏导数的存在性及在该点处沿方向  $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  的方向导数  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$

练习:

设函数  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ , 向量  $\vec{v} = (2, 2, -1)$ , 则  $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \right|_{(1,2,3)} = \underline{\hspace{2cm}}$

【甲 23-24】函数  $f(x,y,z) = x^3y + y^2z + zx$  在点  $(1,1,1)$  处沿  $\mathbf{n} = (1,0,1)$  的方向导数

$\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right|_{(1,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

## 2.6 极值与最值

定理 2.5 (极值必要条件) 若  $f$  在  $P_0$  处可偏导且取极值, 则  $\nabla f(P_0)=0$

定理 2.6 (极值充分条件) 设  $f$  在  $P_0$  处二阶连续可微,  $\nabla f(P_0)=0$ , 考察 Hessian 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

H 正定  $\Rightarrow$  极小值

H 负定  $\Rightarrow$  极大值

H 不定  $\Rightarrow$  鞍点

例: 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 - 6xy + 10y^3 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  所确定的函数, 求  $z = z(x, y)$  的极值点和极值

例: 设某类三角形的三条边  $a, b, c$  满足  $a = c$  及  $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ , 求此类三角形面积最大值

练习:

求函数  $f(x, y) = 2\ln|x+1| + \frac{x^2+y^2}{2(x+1)^2}$  的极值

求函数  $z(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$  的极值