



# 多元函数积分学

辅学讲义

作者：宁郑立 学院：竺可桢学院



## 前言

本讲义面向两个不同层次的学生群体：

- **第一部分（第 1-4 章）** 面向微积分层次的学生，重点讲解基本公式与计算方法，帮助读者快速掌握多元函数积分学的核心计算技能。
- **第二部分（第 5-8 章）** 面向数学分析层次的学生，深入讲解更有技巧性的方法与严格的理论证明，为进一步学习分析学和相关领域打下坚实基础。

读者可根据自身需要选择性阅读，也可将第一部分作为基础先行学习，再进入第二部分的提高内容。

# 目录

前言	i
<b>第一部分 微积分层次——基本公式与计算方法</b>	<b>1</b>
<b>第一章 二重积分</b>	<b>2</b>
1.1 知识要点	2
1.2 方法总结	4
1.3 例题	4
1.4 习题	4
<b>第二章 三重积分</b>	<b>5</b>
2.1 知识要点	5
2.2 方法总结	6
2.3 例题	6
2.4 习题	6
<b>第三章 曲线积分</b>	<b>7</b>
3.1 知识要点	7
3.2 方法总结	8
3.3 例题	8
3.4 习题	8
<b>第四章 曲面积分</b>	<b>9</b>
4.1 知识要点	9
4.2 方法总结	10
4.3 例题	10
4.4 习题	10
<b>第二部分 数学分析层次——技巧方法与理论证明</b>	<b>11</b>
<b>第五章 重积分变量变换</b>	<b>12</b>
5.1 知识要点	12
5.2 方法总结	13
5.3 例题	13
5.4 习题	14
<b>第六章 曲线积分与路径无关性</b>	<b>15</b>
6.1 知识要点	15
6.2 方法总结	16
6.3 例题	16
6.4 习题	16
<b>第七章 积分基本定理的证明</b>	<b>17</b>

---

7.1 知识要点 . . . . .	17
7.2 方法总结 . . . . .	19
7.3 例题 . . . . .	19
7.4 习题 . . . . .	19
<b>第八章 综合方法与难题</b>	<b>20</b>
8.1 知识要点 . . . . .	20
8.2 方法总结 . . . . .	21
8.3 例题 . . . . .	21
8.4 习题 . . . . .	21

## 第一部分

# 微积分层次——基本公式与计算方法

# 第一章 二重积分

## 1.1 知识要点

### 二重积分的概念

#### 定义 1.1.1 (二重积分)

设  $D$  是  $xOy$  平面上的有界闭区域, 函数  $z = f(x, y)$  在  $D$  上有定义且有界. 将  $D$  任意分割为  $n$  个小区域  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$  (其面积也用同一记号表示), 在每个  $\Delta\sigma_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ . 记  $\lambda = \max\{\text{diam}(\Delta\sigma_i)\}$  为最大直径. 若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

存在且与分割方式和取点方式无关, 则称此极限为  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

此时称  $f(x, y)$  在  $D$  上可积.

#### 定义 1.1.2 (X 型区域与 Y 型区域)

- 若区域  $D$  可表示为

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

其中  $\varphi_1, \varphi_2$  在  $[a, b]$  上连续, 则称  $D$  为 **X** 型区域.

- 若区域  $D$  可表示为

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

其中  $\psi_1, \psi_2$  在  $[c, d]$  上连续, 则称  $D$  为 **Y** 型区域.

### 二重积分的基本性质

设  $f(x, y), g(x, y)$  在  $D$  上可积, 则以下性质成立.

#### 定理 1.1.1 (线性性)

对任意常数  $\alpha, \beta$ ,

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

#### 定理 1.1.2 (区域可加性)

若  $D = D_1 \cup D_2$  且  $D_1, D_2$  无公共内点, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

#### 定理 1.1.3 (保序性)

若在  $D$  上  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

特别地,  $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$ .

#### 定理 1.1.4 (积分中值定理)

若  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则存在  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma(D),$$

其中  $\sigma(D)$  为  $D$  的面积。

## 二重积分的计算

#### 定理 1.1.5 (Fubini 定理——矩形区域)

设  $D = [a, b] \times [c, d]$  为矩形区域,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

即积分次序可交换。

#### 定理 1.1.6 (X 型区域的累次积分)

设  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ ,  $f$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

#### 定理 1.1.7 (Y 型区域的累次积分)

设  $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ ,  $f$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

#### 定理 1.1.8 (极坐标变换)

设变换  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  将  $r\theta$  平面上的区域  $D'$  一一映射到  $D$ ,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta.$$

面积元素  $dx dy = r dr d\theta$ 。

#### 定理 1.1.9 (对称性简化)

1. 若  $D$  关于  $x$  轴对称, 且  $f(x, -y) = -f(x, y)$  (关于  $y$  为奇函数), 则  $\iint_D f d\sigma = 0$ ; 若  $f(x, -y) = f(x, y)$  (关于  $y$  为偶函数), 则  $\iint_D f d\sigma = 2 \iint_{D_{\pm}} f d\sigma$ 。
2. 若  $D$  关于  $y$  轴对称, 且  $f(-x, y) = -f(x, y)$  (关于  $x$  为奇函数), 则  $\iint_D f d\sigma = 0$ ; 若  $f(-x, y) = f(x, y)$  (关于  $x$  为偶函数), 则  $\iint_D f d\sigma = 2 \iint_{D_{\mp}} f d\sigma$ 。
3. 若  $D$  关于原点对称且  $f(-x, -y) = f(x, y)$ , 则  $\iint_D f d\sigma = 2 \iint_{D_1} f d\sigma$  ( $D_1$  为一半区域); 若  $f(-x, -y) = -f(x, y)$ , 则积分为零。
4. 若  $D$  关于直线  $y = x$  对称 (即轮换对称), 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$ 。

## 1.2 方法总结

1. 画出积分区域：确定  $D$  的形状及边界曲线，判断其属于 X 型、Y 型或混合型。
2. 选择积分次序：根据被积函数和区域形状，选择先  $y$  后  $x$  或先  $x$  后  $y$ 。
3. 利用对称性：检查被积函数和区域的对称性以简化计算。
4. 换元：若积分区域为圆、扇形、圆环形或边界含  $x^2 + y^2$ ，考虑极坐标变换。
5. 分割区域：当区域不是单一 X 型或 Y 型时，可用平行于坐标轴的直线将其分割。

## 1.3 例题

**例 1.1** 已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$ ，计算二重积分

$$I_1 = \iint_D (x + y + 1)^2 dx dy.$$

**例 1.2** 求积分

$$\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) dx dy,$$

其中  $D$  是由圆  $x^2 + y^2 = 4$  内部和圆  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  外部所围成的平面区域。

## 1.4 习题

 **练习 1.1**

## 第二章 三重积分

### 2.1 知识要点

#### 三重积分的概念

##### 定义 2.1.1 (三重积分)

设  $\Omega$  是空间有界闭区域, 函数  $u = f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上有定义且有界. 将  $\Omega$  任意分割为  $n$  个小区域  $\Delta V_1, \dots, \Delta V_n$ , 在每个  $\Delta V_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . 记  $\lambda$  为最大直径. 若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

存在且与分割方式和取点方式无关, 则称此极限为  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV.$$

##### 定义 2.1.2 (投影区域与截面)

对于空间区域  $\Omega$ :

- 记  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影区域为  $D_{xy}$ .
- 记  $\Omega$  被平面  $z = t$  所截的截面为  $\Omega_t$ .

#### 三重积分的计算方法

##### 定理 2.1.1 (投影法 (先一后二))

设  $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ ,  $f$  在  $\Omega$  上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

##### 定理 2.1.2 (截面法 (先后一))

设  $\Omega$  介于平面  $z = c$  与  $z = d$  之间, 用平行于  $xOy$  的平面截  $\Omega$  所得截面为  $D_z$ , 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

当  $f$  只依赖于  $z$  或被积函数在截面上易于积分时特别有效.

##### 定理 2.1.3 (柱坐标变换)

设变换  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$  ( $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cdot r dr d\theta dz.$$

体积元素  $dV = r dr d\theta dz$ .

##### 定理 2.1.4 (球坐标变换)

设变换  $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = \rho \cos \varphi$  ( $\rho \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

体积元素  $dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$ .

### 定理 2.1.5 (对称性简化)

1. 若  $\Omega$  关于  $xOy$  平面对称:

- $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$  (关于  $z$  为奇函数)  $\implies$  积分为零;
- $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$  (偶函数)  $\implies$  积分等于上半区域积分的两倍.

2. 关于  $yOz$ 、 $zOx$  平面对称的情形类似.

3. 轮换对称性: 若  $\Omega$  关于变量轮换不变, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dV = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dV.$$

## 2.2 方法总结

1. 分析区域形状: 画出  $\Omega$  的草图, 判断其对称性和坐标面投影.
2. 选择坐标系: 球形/锥形区域优先球坐标; 柱形区域优先柱坐标; 一般区域用直角坐标.
3. 选择积分次序: 投影法 (先一后二) 与截面法 (先二后一) 的灵活运用.
4. 利用对称性: 充分利用积分区域和被积函数的对称性.

## 2.3 例题

例 2.1 某物体在空间直角坐标系下表示为以下有界闭区域

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\tan \alpha} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

已知  $V$  内任一点的密度值等于该点到原点的距离.

(1) 求此物体的质量  $M$ .

(2)  $\alpha$  取何值时, 此物体的重心位于  $(0, 0, 1)$ ?

例 2.2 设均匀椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ , 密度为 1,  $l$  是过原点直线, 且椭球上任意一点到该直线距离为  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}$  (其中  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ), 求椭球绕  $l$  旋转的转动惯量.

## 2.4 习题

### 练习 2.1

## 第三章 曲线积分

### 3.1 知识要点

#### 第一类曲线积分（对弧长的积分）

##### 定义 3.1.1 (第一类曲线积分)

设  $L$  为  $xOy$  平面上一条光滑（或分段光滑）曲线弧，函数  $f(x, y)$  在  $L$  上有定义且有界。将  $L$  任意分割为  $n$  个小弧段  $\Delta s_1, \dots, \Delta s_n$ ，在每个  $\Delta s_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ 。记  $\lambda = \max \Delta s_i$ 。若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

存在且与分割方式和取点方式无关，则称其为  $f(x, y)$  沿  $L$  的第一类曲线积分，记作

$$\int_L f(x, y) ds.$$

##### 定理 3.1.1 (第一类曲线积分的计算)

设曲线  $L$  的参数方程为  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ，其中  $x(t), y(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上有连续导数， $f$  在  $L$  上连续，则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

弧长微元  $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ 。

特别地，若  $L$  的方程为  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ，则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

#### 第二类曲线积分（对坐标的积分）

##### 定义 3.1.2 (第二类曲线积分)

设  $L$  为有向光滑曲线弧， $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  在  $L$  上有定义。将  $L$  按方向分割为  $n$  个小弧段，记第  $i$  段的弧微分为  $d\vec{s} = (dx, dy)$ 。若和式的极限存在，则分别定义

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad \int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

合写为  $\int_L P dx + Q dy$ 。

##### 定理 3.1.2 (第二类曲线积分的计算)

设曲线  $L$  的参数方程为  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t$  从  $\alpha$  变到  $\beta$ （对应  $L$  的起点到终点），则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

## 定理 3.1.3 (两类曲线积分的关系)

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds,$$

其中  $(\cos \alpha, \cos \beta)$  为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  处沿前进方向的单位切向量。



## Green 公式

## 定理 3.1.4 (Green 公式)

设闭区域  $D$  由分段光滑的简单闭曲线  $L$  围成, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中  $L$  取正向 (沿  $L$  行走时区域  $D$  始终在左侧)。



## 3.2 方法总结

1. 参数化曲线: 将曲线写成参数方程, 代入公式直接计算。
2. Green 公式: 封闭曲线上的第二类曲线积分优先考虑 Green 公式转化为二重积分。
3. 补线法: 对非封闭曲线, 可补上简单线段使其封闭, 用 Green 公式后再减去补线的积分。
4. 利用与路径无关性: 若  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  在单连通区域上成立, 可改变积分路径以简化计算。
5. 挖洞法: 当被积函数在区域内存在奇点时, 将奇点用小曲线挖去, 使 Green 公式能被应用于剩余区域; 选择与分母适配的辅助曲线 (通常为圆或椭圆) 可以极大简化积分。

## 3.3 例题

例 3.1 设  $L$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b > 0$ ), 取逆时针方向。计算

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

例 3.2 已知曲线  $L: x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, 0 \leq t \leq 1$ , 求第一类曲线积分

$$\int_L \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} ds.$$

例 3.3 设  $C$  是围绕原点的光滑简单闭曲线, 方向为逆时针方向, 求

$$\oint_C \frac{2xy dx - x^2 dy}{x^4 + y^2}.$$

例 3.4 已知  $L$  为从点  $A(-2, 0)$  沿  $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$  到点  $B(2, 0)$ , 计算第二类曲线积分

$$I_2 = \int_L (x^2 - y^2) dx + (x + y) dy.$$

## 3.4 习题

## 练习 3.1

## 第四章 曲面积分

### 4.1 知识要点

#### 第一类曲面积分（对面积的积分）

##### 定义 4.1.1 (第一类曲面积分)

设  $\Sigma$  为光滑（或分片光滑）曲面，函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上有定义且有界。将  $\Sigma$  任意分割为  $n$  个小片  $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$ ，在每个  $\Delta S_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 。记  $\lambda$  为最大直径。若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

存在且与分割方式和取点方式无关，则称其为  $f$  在  $\Sigma$  上的第一类曲面积分，记作

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS.$$

##### 定理 4.1.1 (第一类曲面积分的计算)

设曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ ，其中  $z(x, y)$  在  $D_{xy}$  上有连续偏导数， $f$  在  $\Sigma$  上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

面积微元  $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$ 。类似可得到向  $yOz$ 、 $zOx$  平面投影的计算公式。

#### 第二类曲面积分（对坐标的积分）

##### 定义 4.1.2 (第二类曲面积分)

设  $\Sigma$  为有向光滑曲面，指定其一侧为正向（单位法向量  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ）。向量场  $\vec{F} = (P, Q, R)$  在  $\Sigma$  上有定义。定义

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

右侧为第一类曲面积分，其中  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为指定侧的单位法向量。

##### 定理 4.1.2 (第二类曲面积分的投影计算)

设曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ ，取上侧（法向量与  $z$  轴正向夹角小于  $90^\circ$ ），则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

取下侧时加负号。类似可得  $\iint_{\Sigma} P dy dz$  和  $\iint_{\Sigma} Q dz dx$  的计算公式。

## Gauss 公式与 Stokes 公式

### 定理 4.1.3 (Gauss 公式 (散度定理))

设空间闭区域  $\Omega$  由分片光滑的闭曲面  $\Sigma$  围成, 函数  $P, Q, R$  在  $\Omega$  上有一阶连续偏导数, 则

$$\oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

其中  $\Sigma$  取外侧 (法向量指向  $\Omega$  的外部)。

### 定理 4.1.4 (Stokes 公式)

设  $\Gamma$  为分段光滑的空间有向闭曲线,  $\Sigma$  是以  $\Gamma$  为边界的分片光滑有向曲面, 函数  $P, Q, R$  在包含  $\Sigma$  的空间区域内有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy \, dz & dz \, dx & dx \, dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

其中  $\Gamma$  的方向与  $\Sigma$  的侧按右手法则确定。

## 4.2 方法总结

1. **投影法**: 将曲面投影到坐标面, 转化为二重积分计算。
2. **Gauss 公式**: 封闭面上的第二类曲面积分优先考虑 Gauss 公式转化为三重积分。
3. **补面法**: 对非封闭曲面, 可补上简单曲面使其封闭, 用 Gauss 公式后再减去补面的积分。
4. **Stokes 公式**: 空间封闭曲线上的第二类曲线积分可转化为曲面积分, 或将曲面积分转化为边界曲线积分。
5. **化为第一类积分**: 利用法向量将第二类曲面积分统一表达。

## 4.3 例题

**例 4.1** 已知曲面  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 计算第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 \, dS.$$

**例 4.2** 已知有向曲面  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$ , 方向取上侧, 计算第二类曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \cos x \, dy \, dz - \sqrt{1-y^2} \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

**例 4.3** 已知有向曲面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4z (z \leq 2)$ , 方向取下侧, 计算第二类曲面积分

$$I_3 = \iint_S x^2 y \, dy \, dz - xy^2 \, dz \, dx + 3z \, dx \, dy.$$

## 4.4 习题

### 练习 4.1

## 第二部分

# 数学分析层次——技巧方法与理论证明

## 第五章 重积分变量变换

### 5.1 知识要点

#### 一般变量变换公式

##### 定理 5.1.1 (二重积分的变量变换)

设变换

$$T: x = x(u, v), y = y(u, v)$$

将  $uv$  平面上的有界闭区域  $D'$  一一地映为  $xy$  平面上的有界闭区域  $D$ , 且  $x(u, v), y(u, v) \in C^1(D')$ , Jacobi 行列式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{在 } D' \text{ 内部}).$$

若  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

##### 定理 5.1.2 (三重积分的变量变换)

设变换

$$T: x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$$

将  $uvw$  空间中的有界闭区域  $\Omega'$  一一地映为  $\Omega$ , 且各偏导数连续, Jacobi 行列式

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0 \quad (\text{在 } \Omega' \text{ 内部}).$$

若  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

#### 常用变换的 Jacobi 行列式

##### 定理 5.1.3 (平面极坐标)

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta:$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

##### 定理 5.1.4 (空间柱坐标)

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z:$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r.$$

##### 定理 5.1.5 (空间球坐标)

$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi:$

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin \varphi.$$

## 定理 5.1.6 (广义极坐标)

 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta \quad (a, b > 0):$ 

$$J = abr.$$

适用于椭圆区域  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 。

## 定理 5.1.7 (广义球坐标)

 $x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, z = c\rho \cos \varphi \quad (a, b, c > 0):$ 

$$J = abc\rho^2 \sin \varphi.$$

## 变量变换公式的证明思路

## 定理 5.1.8

二重积分变量变换公式成立。

**证明** 证明分为以下步骤:

1. 分割区域: 将  $D'$  用平行于坐标轴的直线网分割为小矩形  $\Delta D'_i$ 。在变换  $T$  下, 每个小矩形对应  $D$  中的曲边平行四边形  $\Delta D_i$ 。
2. 线性近似: 在局部, 变换  $T$  可由其 Jacobi 矩阵近似。小矩形  $\Delta D'_i$  的面积  $\Delta u \Delta v$ , 经线性变换后面积变为  $|J| \Delta u \Delta v$  (忽略高阶无穷小)。
3. 构造 Riemann 和: 原积分的 Riemann 和经变换后可近似为

$$\sum f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i \approx \sum f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| \Delta u \Delta v.$$

4. 取极限: 令分割加密 ( $\lambda \rightarrow 0$ ), 两端取极限即得变换公式。

详细证明需用到二重积分的定义、一致连续性以及 Jacobi 行列式的连续性。 □

## 5.2 方法总结

1. 观察区域边界: 由边界方程的形状选择适当的变换 (椭圆、双曲线等)。
2. 观察被积函数: 若被积函数含有  $f(x^2 + y^2)$ 、 $f(y/x)$  等表达式, 优先考虑极坐标。
3. 广义坐标: 对于椭圆、椭球等区域, 选取合适的缩放因子  $a, b, c$ 。
4. 正定二次型: 对于由正定二次型  $H(\mathbf{x}) \leq 1$  定义的椭球区域, 可通过正交变换  $H(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$  将其标准化为单位球。

## 5.3 例题

**例 5.1** 设  $H(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ ,  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  是 3 阶正定对称阵。求

$$I = \iiint_{H(\mathbf{x}) \leq 1} e^{\sqrt{H(\mathbf{x})}} dx_1 dx_2 dx_3.$$

**例 5.2** 求

$$\iiint_{\substack{x,y,z,u \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2+u^2 \leq 1}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}} dx dy dz du.$$

## 5.4 习题

### 练习 5.1

## 第六章 曲线积分与路径无关性

### 6.1 知识要点

#### 基本概念

##### 定义 6.1.1 (势函数 (原函数))

设在区域  $D$  上给定向量场  $\vec{F} = (P, Q)$ 。若存在可微函数  $u(x, y)$  使得在  $D$  上恒有

$$du = P dx + Q dy,$$

即  $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$ , 则称  $u(x, y)$  为  $\vec{F}$  的势函数 (或原函数), 称  $\vec{F}$  为保守场。

##### 定义 6.1.2 (单连通区域)

若区域  $D$  内任何一条简单闭曲线所围的区域都完全包含在  $D$  内 (即  $D$  没有“洞”), 则称  $D$  为单连通区域。否则称为多连通区域 (复连通区域)。

#### 积分与路径无关的等价条件

##### 定理 6.1.1 (积分与路径无关的四个等价条件)

设  $D \subset \mathbb{R}^2$  为单连通区域, 函数  $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(D)$ , 则以下四个命题等价:

1. 对  $D$  内任意两点  $A, B$ , 曲线积分  $\int_L P dx + Q dy$  与路径  $L$  无关 (只与起点和终点有关)。
2. 对  $D$  内任意封闭曲线  $C$ , 有  $\oint_C P dx + Q dy = 0$ 。
3. 在  $D$  内恒有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。
4. 存在  $D$  上的可微函数  $u(x, y)$ , 使得  $du = P dx + Q dy$  (即  $\vec{F} = (P, Q)$  是保守场)。

**证明** [等价性证明概要] (1)  $\Rightarrow$  (2): 取同一闭合曲线正向和反向两段, 由路径无关性知积分相反, 故总和为零。

(2)  $\Rightarrow$  (1): 设  $L_1, L_2$  为从  $A$  到  $B$  的两条路径, 则  $L_1 \cup (-L_2)$  为闭曲线, 由 (2) 得  $\int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$ , 故积分值相等。

(2)  $\Rightarrow$  (3): 由 Green 公式, 对  $D$  内任意闭曲线  $C$  所围区域  $G$ ,  $\iint_G (Q_x - P_y) dx dy = \oint_C P dx + Q dy = 0$ 。由  $G$  的任意性得  $Q_x - P_y \equiv 0$ 。

(3)  $\Rightarrow$  (4): 固定  $(x_0, y_0) \in D$ , 定义

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

其中积分路径取从  $(x_0, y_0)$  到  $(x, y)$  的任一折线段。由条件 (3) (已隐含前三条的等价性), 该积分与路径无关, 且可验证  $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$ 。

(4)  $\Rightarrow$  (1): 若  $P dx + Q dy = du$ , 则  $\int_L P dx + Q dy = u(B) - u(A)$ , 显然与路径无关。  $\square$

## 原函数的求法

### 定理 6.1.2 (原函数的求法)

设  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  在单连通区域  $D$  上成立。则原函数可按如下方法求得：

1. 折线积分法：固定  $(x_0, y_0) \in D$ ，则

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C.$$

2. 偏积分法：由  $u_x = P$ ，对  $x$  积分得  $u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y)$ ，再代入  $u_y = Q$  确定  $\varphi(y)$ 。
3. 凑微分法：将被积表达式直接凑为某个函数的全微分。



## 多连通区域上的注记

**注** 若  $D$  为多连通区域，则  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  不足以保证积分与路径无关。以著名的例子  $\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  为例，在去掉原点的任何单连通区域上可验证  $Q_x = P_y$ ，但绕原点的闭曲线积分值为  $2\pi \neq 0$ （称为循环常数）。

## 6.2 方法总结

1. 验证条件：先检查  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  是否成立；若成立且区域单连通，则积分与路径无关。
2. 改变路径：当与路径无关时，选择最简单的路径（如平行于坐标轴的折线）进行计算。
3. 求原函数：使用偏积分法或折线积分法求出势函数  $u(x, y)$ ，则积分值为  $u(B) - u(A)$ 。
4. 多连通情形：验证区域不含奇点，或利用循环常数修正结果。

## 6.3 例题

### 例 6.1

## 6.4 习题

### 练习 6.1

## 第七章 积分基本定理的证明

### 7.1 知识要点

本章给出 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式的严格证明。这三个公式是多元函数积分学的基本定理，分别建立了平面区域积分与边界积分、空间区域积分与边界曲面积分、曲面积分与边界曲线积分之间的联系。它们可以统一地表示为微积分基本定理在多元情形下的推广：

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

### Green 公式的证明

#### 定理 7.1.1 (Green 公式)

设平面有界闭区域  $D$  由分段光滑的简单闭曲线  $L$  围成，函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上有一阶连续偏导数，则

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中  $L$  取正向。

**证明** 先证  $D$  同时为 X 型和 Y 型区域的情形。

第一步：证  $\oint_L P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ 。

设  $D$  为 X 型区域：

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

则

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx.$$

另一方面，闭曲线  $L$  可分为下弧  $L_1: y = \varphi_1(x)$ （从左到右）和上弧  $L_2: y = \varphi_2(x)$ （从右到左）。计算沿  $L$  的积分：

$$\oint_L P dx = \int_{L_1} P dx + \int_{L_2} P dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx = - \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx.$$

对比两式即得  $\oint_L P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ 。

第二步：设  $D$  为 Y 型区域，同理可证  $\oint_L Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$ 。

第三步：两式相加即得 Green 公式。

第四步（推广）：若  $D$  不是同时为 X 型和 Y 型区域，可用辅助线将其分割为若干满足条件的子区域，对各子区域分别应用 Green 公式后求和。辅助线上的积分因方向相反而抵消，最终得证。□

## Gauss 公式的证明

## 定理 7.1.2 (Gauss 公式)

设空间有界闭区域  $\Omega$  由分片光滑的闭曲面  $\Sigma$  围成, 函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在  $\Omega$  上有一阶连续偏导数, 则

$$\oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

其中  $\Sigma$  取外侧。

**证明** 只需证明  $\iint_{\Sigma} R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV$ , 其余两项的证明类似。

设  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影为  $D_{xy}$ , 且  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

(即  $\Omega$  关于  $z$  方向是简单区域)。则

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx \, dy = \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx \, dy.$$

曲面  $\Sigma$  由三部分组成: 下底面  $\Sigma_1: z = z_1(x, y)$  (取内侧, 即法向量指向  $z$  轴负方向)、上顶面  $\Sigma_2: z = z_2(x, y)$  (取外侧, 即上侧)、以及侧面  $\Sigma_3$  (在  $xOy$  平面上的投影面积为零)。

对于  $\Sigma_1$  (内侧),  $dx \, dy = -dx \, dy$ :  $\iint_{\Sigma_1} R \, dx \, dy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx \, dy$ 。

对于  $\Sigma_2$  (上侧),  $dx \, dy = dx \, dy$ :  $\iint_{\Sigma_2} R \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx \, dy$ 。

对于  $\Sigma_3$ , 投影面积为零, 故  $\iint_{\Sigma_3} R \, dx \, dy = 0$ 。

综上,

$$\oiint_{\Sigma} R \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx \, dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV.$$

若  $\Omega$  不是简单区域, 可用辅助曲面将其分割为若干满足上述条件的子区域, 分别应用公式后求和 (辅助曲面上的积分因方向相反而抵消)。□

## Stokes 公式的证明

## 定理 7.1.3 (Stokes 公式)

设  $\Gamma$  为分段光滑的空间有向闭曲线,  $\Sigma$  是以  $\Gamma$  为边界的分片光滑有向曲面, 函数  $P, Q, R$  在包含  $\Sigma$  的空间区域内有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

其中  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为  $\Sigma$  指定侧的单位法向量,  $\Gamma$  的方向与  $\Sigma$  的侧满足右手法则。

**证明** 只需证明  $\oint_{\Gamma} P \, dx = \iint_{\Sigma} \left( \cos \beta \frac{\partial P}{\partial z} - \cos \gamma \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS$ , 其余两项的证明类似。

设曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ ,  $\Sigma$  取上侧。则

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1).$$

在  $\Sigma$  上,  $P(x, y, z) = P(x, y, z(x, y))$ , 应用复合函数求导法则:

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) = P_y + P_z \cdot z_y.$$

$\partial\Sigma = \Gamma$  在  $xOy$  平面上的投影记为  $\Gamma'$ ,  $\Gamma'$  为  $D_{xy}$  的边界 (取正向)。由 Green 公式,

$$\oint_{\Gamma} P dx = \oint_{\Gamma'} P(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy = - \iint_{D_{xy}} (P_y + P_z \cdot z_y) dx dy.$$

而

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left( \cos \beta \frac{\partial P}{\partial z} - \cos \gamma \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS &= \iint_{D_{xy}} \left( \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} P_z - \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} P_y \right) \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} (P_y + P_z z_y) dx dy. \end{aligned}$$

两式相等, 得证。

对于一般曲面 (不能表示为  $z = z(x, y)$  的形式), 可将其分割为若干满足上述条件的小片, 对各片分别证明后求和。□

## 7.2 方法总结

1. Green 公式的关键是将二重积分为累次积分, 利用 Newton-Leibniz 公式。
2. Gauss 公式的证明思想与 Green 公式一致, 只是维度升为三维。
3. Stokes 公式的证明通过曲面参数化转化为平面区域的 Green 公式。
4. 三者本质上是同一个定理在不同维度上的表现形式, 均可统一于外微分形式下的 Stokes 定理:  $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$ 。

## 7.3 例题

### 例 7.1

## 7.4 习题

### 练习 7.1

## 第八章 综合方法与难题

### 8.1 知识要点

#### 积分不等式

##### 定理 8.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式 (积分形式))

设  $f, g$  在区域  $\Omega$  上可积, 则

$$\left(\int_{\Omega} fg\right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} f^2\right)\left(\int_{\Omega} g^2\right).$$

##### 定理 8.1.2 (Minkowski 不等式)

设  $f, g$  在  $\Omega$  上可积,  $p \geq 1$ , 则

$$\left(\int_{\Omega} |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p\right)^{1/p}.$$

#### 含参变量积分的性质

##### 定理 8.1.3 (含参变量积分的连续性)

设  $f(x, y)$  在矩形区域  $[a, b] \times [c, d]$  上连续, 则函数

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

在  $[c, d]$  上连续。

##### 定理 8.1.4 (含参变量积分的求导 (Leibniz 法则))

设  $f(x, y)$  及  $f_y(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, d]$  上连续, 则

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$

##### 定理 8.1.5 (含参变量积分的变限求导)

设  $a(y), b(y)$  可导,  $f, f_y$  连续, 则

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y).$$

#### 各积分之间的联系

##### 定理 8.1.6 (统一视角)

Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式均可写成统一的 Newton-Leibniz 形式:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

其中:

- $M = D$  (平面区域),  $\partial M = L$ ,  $\omega = P dx + Q dy$ ,  $d\omega = (Q_x - P_y) dx \wedge dy \mapsto$  **Green** 公式。
- $M = \Omega$  (空间区域),  $\partial M = \Sigma$ ,  $\omega$  为 2-形式  $\mapsto$  **Gauss** 公式。

- $M = \Sigma$  (曲面),  $\partial M = \Gamma$ ,  $\omega$  为 1-形式  $\mapsto$  Stokes 公式。

## 广义积分与瑕积分 (多元情形)

### 定义 8.1.1 (无界区域上的二重积分)

设  $D$  为无界区域,  $f(x, y) \geq 0$ 。取有界单调递增的区域列  $D_n \uparrow D$ , 若极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f \, d\sigma$  存在且与  $D_n$  的选取无关, 则称广义二重积分收敛, 记作  $\iint_D f \, d\sigma$ 。

### 定理 8.1.7 (比较判别法 (多元))

若在无界区域  $D$  上  $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ , 且  $\iint_D g \, d\sigma$  收敛, 则  $\iint_D f \, d\sigma$  收敛。

## 8.2 方法总结

1. 积分不等式: 利用一元积分不等式的证明方法在多元情形下的推广。
2. 含参变量积分: 灵活运用 Leibniz 法则进行积分号下求导, 解决含有参数的特殊积分。
3. 各积分之间的互化: 根据问题特点, 选择最方便的公式将复杂积分转化为简单积分。
4. 广义积分: 注意多元广义积分收敛性与累次积分收敛性之间的区别。
5. 估计技巧: 利用梯度估计、对称性放缩、不等式等方法处理无法精确计算的积分的界。
6. Chebyshev 型不等式: 利用单调性构造恒正 (或恒负) 的重积分以导出不等式。

## 8.3 例题

例 8.1 设  $f(x, y)$  在  $G$  上一阶连续可微, 在  $\partial G$  上  $f(x, y) = 0$ ,  $G = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 。证明:

$$\left| \iint_G f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \frac{\pi}{3} a^3 \max_G \{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

例 8.2 证明:

$$1.96 < \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \, dx \, dy < 2.$$

例 8.3 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续、单调减少且恒取正值, 则

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) \, dx}{\int_0^1 x f(x) \, dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) \, dx}{\int_0^1 f(x) \, dx}.$$

例 8.4 设  $f(t)$  是连续函数, 令

$$F(t) = \iiint_D f(xyz) \, dx \, dy \, dz,$$

其中  $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\}$ 。证明:

$$F'(t) = \frac{3}{t} \int_0^{t^3} \frac{g(u)}{u} \, du,$$

其中  $g(u) = \int_0^u f(s) \, ds$ 。

## 8.4 习题

### 练习 8.1