微积分（H）II

期末复习

期末复习讲义

https://www.cc98.org/topic/6542454 参考 ephemerall 复习资料

2026 年 6 月 20 日

课程大纲

(1) 空间几何
向量与曲面

(2) 多元微分
偏导与极值

(3) 重积分
二重与三重

(4) 线面积分
曲线与曲面

(5) 三大公式
格林•高斯
斯托克斯

(6) 无穷级数
数项•幂级数
傅里叶

(7) 证明题
不等式与
向量恒等式

一句话概括

方向问题全部转为向量——法向量用叉积，共面判据用混合积，距离用叉积模除以底长。

- **数量积（点积）：** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ ——判垂直、求夹角
- **向量积（叉积）：** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ——求同时垂直于二者的向量、平行四边形面积
- **混合积：** $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ ——平行六面体体积、判共面

易错提醒

叉积中间项的负号（源于三阶行列式展开的 $-+-+$ 规律）是高频丢分点!

三阶行列式速记

给定行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

两种算法：

1. **按第一行展开（余子式法）**

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

2. **对角线法则（沙路法）：三条「左上 $\to$ 右下」取正 $+$ 三条「右上 $\to$ 左下」取负**

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 3 = -5$$

向量积（叉积）——核心工具

坐标公式：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

几何意义：

- 方向：同时垂直于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$（右手定则）
- 模：$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta =$ 平行四边形面积

用途

- 求平面的**法向量**
- 求点到直线的**距离**
- 求与两向量都垂直的方向

易错

中间项 $a_3 b_1 - a_1 b_3$ 带负号！忘记负号是经典错误。

平面与直线方程

平面方程

点法式： 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

一般式： $Ax + By + Cz + D = 0$

空间直线方程

点向式（对称式）： 过 P_0，方向向量 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

两直线关系

共面（平行/相交/异面）？ $\iff$ 方向向量与连线向量的混合积 $=0$

曲面与空间曲线

常见曲面：

- **旋转面：** 母线绕轴旋转，$y=f(x)$ 绕 x 轴 $\to$ $y^2+z^2=[f(x)]^2$
- **柱面：** 缺少某一变量，如 $F(x,y)=0\to$ 母线平行于 z 轴
- **球面：** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
- **椭球面：** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

空间曲线：

- **一般式：** $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ （两曲面交线）
- **参数式：** $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

关键技巧

识别旋转面：方程中某两个变量以**平方和**形式出现

切线与切平面

空间曲线切线（参数式）

曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 在 $t=t_0$ 处：

$$\text{切线方向：}\ \boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

曲面切平面与法线

曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 P_0 处：

$$\text{法向量：}\ \boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{P_0}$$

$$\text{切平面：}\ F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$$

$$\text{法线：}\ \frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$$

距离与投影问题

例

距离公式汇总：

- 点到平面距离：$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- 点到直线距离：$d = \dfrac{|\overrightarrow{P_0P} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$（叉积模 $\div$ 方向向量模）
- 两异面直线距离：$d = \dfrac{|(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}$
- 投影：$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\, \boldsymbol{b}$

证明.

思路统一： 距离 $=$ 用叉积求面积 $\div$ 底长；投影 $=$ 用点积提取分量。 □

例

设 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-3,4)$，求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-1,1)$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 4=2+3+4=9$$

例

求过点 $(1,2,0)$ 且与平面 $x+2y-z=3$ 平行的平面方程。

例

设 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-3,4)$，求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$。

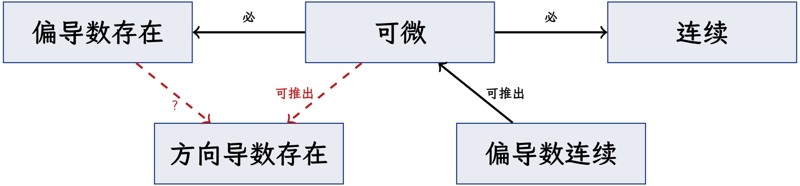
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-1,1)$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1\cdot2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot4=2+3+4=9$$

例

求过点 $(1,2,0)$ 且与平面 $x+2y-z=3$ 平行的平面方程。**解：** 法向量相同 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$，点法式：

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+(-1)\cdot(z-0)=0 \implies x+2y-z=5$$



核心区别

一元：可导 $\Leftrightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续

多元：偏导存在 $\not\Rightarrow$ 可微 $\not\Rightarrow$ 连续，方向导数存在不能由偏导推出

典型反例

默认 (0,0) 所有函数的函数值皆为 0

例

$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$，在 (0,0) 处存在偏导但不连续，自然不可微

例

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，在 (0,0) 处连续但不存在偏导

例

$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $(0,0)$ 处偏导存在（均为 0），可微，但偏导不连续

偏导数与高阶偏导

定义

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

混合偏导的 Schwarz 定理

若 f_{xy} 和 f_{yx} 在某点连续，则 $f_{xy} = f_{yx}$（求导次序可交换）。

例

设 $f(x, y) = x^2 e^{3y} + \sin(xy)$，求全部二阶偏导。

$$f_x = 2xe^{3y} + y\cos(xy), \quad f_y = 3x^2 e^{3y} + x\cos(xy)$$

$$f_{xx} = 2e^{3y} - y^2\sin(xy), \quad f_{yy} = 9x^2 e^{3y} - x^2\sin(xy)$$

$$f_{xy} = 6xe^{3y} + \cos(xy) - xy\sin(xy) = f_{yx}$$

全微分与可微性

全微分定义

$z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微，则

$$dz = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$$

即全增量 $\Delta z = f_x\Delta x + f_y\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$

可微的判别条件

1. **充分条件：偏导数在该点连续** $\Rightarrow$ 可微
2. **必要条件：** 可微 $\Rightarrow$ 偏导数存在
3. **充要条件（用定义判定）：**

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta z - [f_x\Delta x + f_y\Delta y]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

方向导数与梯度

方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是单位方向向量。
梯度：

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

梯度性质

- 梯度方向是函数**增长最快**的方向
- $|\nabla f|$ = 最大方向导数
- 梯度垂直于**等值面**/等值线

方向导数与梯度的关系

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{l}_0 = |\nabla f| \cos\theta$$

当 $\boldsymbol{l}$ 沿梯度方向时取最大值 $|\nabla f|$。

复合函数求导——链式法则

树形图法（最可靠）

$z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，**画出依赖树：**

$$\begin{tikzcd}
 & & & z \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & u \arrow[dl] \arrow[dr] & & & v \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
x & & y & x & & y &
\end{tikzcd}$$

从 z 到目标变量之间有多少条路径，就加多少项：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

例

$z=e^u\sin v$，$u=xy$，$v=x+y$，求 z_x。

$$z_x=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

隐函数求导

隐函数存在定理（单个方程）

$F(x,y,z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$，当 $F_z\neq 0$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

方程组情形（两个方程）

$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定 $u=u(x,y), v=v(x,y)$。两边同时求导，解方程组

例

$e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。令 $F(x,y,z)=e^z-xyz$，$F_x=-yz$，$F_z=e^z-xy$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

多元函数的极值

无条件极值（自由极值）

求 $f(x,y)$ 的极值：

1. 令 $f_x = 0$, $f_y = 0$，解得驻点
2. 计算 $A = f_{xx}$, $B = f_{xy}$, $C = f_{yy}$ 在驻点的值
3. 判别式 $\Delta = AC - B^2$：
   - $\Delta > 0$：$A > 0$ 极小值，$A < 0$ 极大值
   - $\Delta < 0$：不是极值（鞍点）
   - $\Delta = 0$：无法判定，需其他方法

条件极值——Lagrange 乘数法

问题形式

在约束 $\varphi(x,y,z)=0$ 下求 $f(x,y,z)$ 的极值。

方法

构造 Lagrange 函数:

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

令所有偏导为零:

$$\begin{cases} L_x=f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ L_y=f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ L_z=f_z+\lambda\varphi_z=0 \\ L_\lambda=\varphi=0 \end{cases}$$

例

在 $x^2+y^2=1$ 条件下求 $f(x,y)=x+y$ 的最值。

$$L=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$L_x=1+2\lambda x=0,\ L_y=1+2\lambda y=0 \implies x=y=-\frac{1}{2\lambda}$$

代入 $x^2+y^2=1 \implies \frac{1}{2\lambda^2}=1 \implies \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ x=y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\ f_{\max}=\sqrt{2},\ f_{\min}=-\sqrt{2}$

二重积分 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$

几何意义： 曲面 $z=f(x,y)$ 在区域 D 下的曲顶柱体体积（当 $f\geq 0$）

三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$

物理意义： 密度为 f 的立体 Ω 的质量

计算策略

降维： 二重 $\to$ 两次定积分（累次积分）；三重 $\to$ 三次定积分

坐标系选择： 区域形状决定用直角/极/柱/球坐标

二重积分（直角坐标）

X-型区域： $a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$

$$\iint_D f\,d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

诀窍： 先对 y 积（内层），再对 x 积（外层）

Y-型区域： $c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)$

$$\iint_D f\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

如何选取积分次序？

- 被积函数：哪个变量更好积就后积哪个
- 区域图形：画图！决定是 X 型还是 Y 型
- 先积复杂函数，后积简单函数

易错

交换次序时必须重新确定上下限！

对称性与变量代换

利用对称性化简

- **区域关于 xOy 面对称**，被积函数是关于 z 的奇函数 $\Longrightarrow$ 积分为 0
- **轮换对称性**：若区域和被积函数在变量轮换下不变，可简化计算
- **偶函数**在对称区域上 $= 2\times$ 半个区域

一般变量代换（二重积分）

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v), \quad dxdy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$$

其中 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ 是雅可比行列式。

一般变量代换（二重积分）

例

计算 $\iint_D (x-y)^2 \sin(x+y)\, dxdy$，$D$ 是正方形 $0 \le x \pm y \le \pi$。令 $u = x+y$，$v = x-y$，$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$。区域变为：$0 \le u \le \pi$，$0 \le v \le \pi$。

$$\iint = \int_0^\pi du \int_0^\pi v^2 \sin u \cdot \frac{1}{2}\, dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}$$

二重积分（极坐标）

换元公式

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

易错！

千万不要忘记面积元素中的 r！这是极坐标换元中最常忘记的因子。

例

计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$，$D: x^2+y^2 \le a^2$。

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr = 2\pi \cdot \frac{1-e^{-a^2}}{2} = \pi(1-e^{-a^2})$$

三重积分（坐标系选择）

直角坐标

$$\iiint_\Omega f\,dV = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\,dz$$

适用范围：投影区域 D 和上下曲面都较简单。

柱面坐标

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,\ dV = r\,drd\theta dz$$

球面坐标

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi$$

$$dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi d\theta$$

累次积分与交换次序

交换二重积分次序

要点：**画区域图**，重新用另一种型描述。

例

交换 $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy$ 的次序。区域：$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$（三角形）
改写为 Y 型：$0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f\,dx$$

三重积分交换次序

三重积分可在三种坐标系内互换，核心仍是画出积分区域、重新描述边界。

类型	名称	物理意义	核心公式
第一类线	弧长型	曲线质量	$\int_L f ds = \int_a^b f\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$
第二类线	坐标型	力做功	$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz')dt$
第一类面	面积型	曲面质量	$\iint_\Sigma f dS = \iint_D f\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$
第二类面	通量型	流量/通量	$\iint_\Sigma P dydz + Q dzdx + R dxdy$

核心区别

第一类（对弧长/面积）：**标量积**，无方向性，$ds \geq 0$，$dS \geq 0$

第二类（对坐标）：**向量积**，有方向性，投影可正可负

第一类曲线积分（弧长型）

定义与计算

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

将曲线参数化 $L : \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t\in[\alpha,\beta]$：

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

例

计算 $\int_L (x^2+y^2)\,ds$，L 是上半圆 $x^2+y^2=a^2, y\ge 0$。参数化：$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in[0,\pi]$，$ds = a\,dt$

$$\int_L = \int_0^\pi a^2\cdot a\,dt = \pi a^3$$

第二类曲线积分（坐标型）

定义

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \lim_{\lambda\to 0}\sum(P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z)$$

参数化后：

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta (Px' + Qy' + Rz')\,dt$$

方向性

第二类线积分与方向有关：

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_L Pdx + Qdy$$

例

计算 $\int_L y dx + x dy$，$L: y = x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$。参数化：$x = t,\ y = t^2,\ t \in [0,1]$

$$\int_L = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t \cdot 2t)\, dt = \int_0^1 3t^2\, dt = 1$$

第一类曲面积分（面积型）

计算

曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$，$(x, y) \in D$:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{D} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

例

计算 $\iint_{\Sigma} z\, dS$，Σ 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$。

$$z_x = \frac{-x}{z},\ z_y = \frac{-y}{z},\ \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$$

$$\iint_{\Sigma} z\, dS = \iint_{D} z \cdot \frac{a}{z}\, dxdy = a \cdot \pi a^2 = \pi a^3$$

第二类曲面积分（通量型）

计算方法

以 $R(x, y, z)\, dxdy$ 项为例（化为 $z = z(x, y)$）：

$$\iint_{\Sigma} R\, dxdy = \pm \iint_{D} R(x, y, z(x, y))\, dxdy$$

上侧取 $+$，下侧取 $-$；其他项同理。

直接投影法

若 $\Sigma : z = z(x, y)$，方向为上侧：

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{D} [P \cdot (-z_x) + Q \cdot (-z_y) + R]\, dxdy$$

板块五　三大公式

边界与内部的关系

格林公式

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

平面区域 $D \subset \mathbb{R}^2$

高斯公式（散度定理）

$$\oiint_{\partial\Omega} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV$$

空间区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

斯托克斯公式

$$\oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

空间曲面 Σ 上的曲线积分 $\to$ 曲面积分

统一思想

区域内部的「总量」＝ 边界上的「流通量」——降维转化

格林公式（Green's Theorem）

定理（无奇点情形）

设 D 是有界闭区域，$P, Q \in C^1(D)$，则

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

应用

计算平面区域面积：$A = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

例

计算 $\oint_L (x^2)dx + (y^3)dy$，$L$ 是 $x^2 + y^2 = 1$ 正向。

$$\oint_L = \iint_D (0 - 0)\, dxdy = 0$$

格林公式——奇点处理（挖洞法）

含奇点的情形

若 P_x, Q_y 在 D 内某点不连续（有奇点），需将奇点**挖去**：

$$\oint_{L_{外}} = \oint_{L_{内}} + \iint_{D_{环}} (Q_x - P_y)$$

即用一条小的内圈曲线包围奇点，积分转化为内圈上的积分。

格林公式——奇点处理（挖洞法）

例

计算 $\oint_L \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$，$L$ 是包围原点的任意正向闭曲线。

$$P_y = Q_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \implies Q_x - P_y = 0\ (\text{除原点外})$$

在 L 内作小圆 $C_\varepsilon : x^2+y^2=\varepsilon^2$ 正向后挖洞：

$$\oint_L = \oint_{C_\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} d\theta = 2\pi$$

高斯公式（Gauss's Divergence Theorem）

定理

设 Ω 是有界闭区域，$\Sigma = \partial\Omega$ **取外侧**，则

$$\oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

高斯公式简写：$\displaystyle\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,dV$

高斯公式（Gauss's Divergence Theorem）

例

计算 $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，$\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$$

用球坐标：$\iiint_{\Omega} 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi d\theta$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^4 \, d\rho = 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12\pi}{5}$$

斯托克斯公式（Stokes' Theorem）

定理

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

方向：$\partial\Sigma$ 的正向与 Σ 的法向量满足**右手法则**。

旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

斯托克斯公式（Stokes' Theorem）

例

计算 $\oint_L ydx + zdy + xdz$，L 是 $x + y + z = 0$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交线。旋度 $\nabla \times \boldsymbol{A} = (-1, -1, -1)$，$\Sigma$ 取平面的一部分。

$$\oint_L = \iint_\Sigma -dydz - dzdx - dxdy = \iint_D -3dxdy$$

路径无关与势函数

路径无关的等价条件（在单连通区域 D 中）

以下条件等价：

1. $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关（只取决于起终点）
2. $\oint_L Pdx + Qdy = 0$（沿任何闭曲线积分为 0）
3. 存在**势函数** u，使 $du = Pdx + Qdy$，即 $\nabla u = (P, Q)$
4. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$（在 D 内处处成立）

求势函数（原函数）

满足 $u_x = P$，$u_y = Q$：

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, s)\, ds + C$$

或先对 x 积 P（把 y 当常数），再对 y 求导与 Q 对比确定任意函数。

数项级数

$\sum a_n$

敛散判别

幂级数

$\sum a_n(x-x_0)^n$

收敛半径与和函数

傅里叶级数

$a_0+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

周期函数展开

应用: 数项级数求和 · 函数展开为幂级数 · 微分方程级数解

数项级数——敛散判别法

正项级数 $\sum a_n$ $(a_n \geq 0)$ 判别法

1. **比较判别法：** 若 $a_n \leq Cb_n$（n 足够大），且 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛
2. **比值判别法（D'Alembert）：** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ $\begin{cases} < 1 : \text{收敛} \\ > 1 : \text{发散} \\ = 1 : \text{不确定} \end{cases}$
3. **根值判别法（Cauchy）：** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$（判据同上）
4. **比较的极限形式：** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$ 则同敛散

常用参照级数

- p-级数：$\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛 $\iff$ $p > 1$
- 几何级数：$\sum ar^n$ 收敛 $\iff$ $|r| < 1$

数项级数——交错级数与任意项级数

Leibniz 判别法（交错级数）

交错级数 $\sum(-1)^{n-1}u_n$（$u_n > 0$）收敛的充分条件：

1. $u_n \geq u_{n+1}$（单调递减）
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

绝对收敛与条件收敛

- $\sum|a_n|$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ **绝对收敛**（重排不改变和）
- $\sum|a_n|$ 发散但 $\sum a_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ **条件收敛**
- 绝对收敛级数中各项可以任意重排，条件收敛则不可

例

判别 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的敛散性。$u_n = \frac{1}{n} \searrow 0$，由 Leibniz 判别法知交错调和级数**条件收敛**（$\sum\frac{1}{n}$ 发散）。

幂级数——收敛半径

定义

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 R:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{或} \quad R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

收敛范围

- 若 $R=0$：只在 $x=x_0$ 收敛
- 若 $0<R<\infty$：在 $|x-x_0|<R$ **内绝对收敛**，$|x-x_0|>R$ 发散
- **端点需单独判定**：代入 $\pm R$，化为数项级数判别
- 若 $R=\infty$：对一切 x 收敛

例

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域。$R = \lim \frac{|1/n|}{|1/(n+1)|} = 1$。在 $x = 1$ 发散（调和），$x = -1$ 条件收敛。收敛域：$[-1, 1)$。

和函数的求法

- **逐项求导：** 在 $(-R, R)$ 内可逐项求导任意次
- **逐项积分：** 在 $(-R, R)$ 内可逐项积分
- **利用已知展开：** 借助 $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 等的展开式

泰勒级数 / 麦克劳林级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ （在收敛域内成立）

必须熟记的基本展开

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (|x| \leq 1)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad (|x| < \tfrac{\pi}{2})$$

定义（周期 2π）

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中：

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

奇偶延拓

- f 为奇函数 $\Longrightarrow$ 正弦展开：$a_n = 0$，只有 b_n 项
- f 为偶函数 $\Longrightarrow$ 余弦展开：$b_n = 0$，只有 a_n 项

Dirichlet 收敛定理

若 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调且仅有有限个第一类间断点，则傅里叶级数收敛于：

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

即连续点收敛于函数值，跳跃间断点收敛于左右极限平均值。

例

求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和。**解：**利用幂级数：$\sum nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$（对 $\frac{1}{1-x}$ 求导），令 $x=\frac{1}{2}$：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{(1-1/2)^2}=4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

例

将 $f(x)=|x|$（$|x|\leq\pi$）展开为傅里叶级数。偶函数，$b_n=0$：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

板块七　证明题入门

多元微分类证明

- **齐次函数 Euler 定理：** 若 $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$，则 $xf_x + yf_y = kf(x, y)$
- **恒等式证明：** 直接求偏导验证，或利用对称性/链式法则
- **微分中值定理：** 多元推广，$f(B) - f(A) = \nabla f(\xi) \cdot \overrightarrow{AB}$

用最值法/构造函数证不等式

步骤：

1. 将不等式改写为 $F(x, y, \ldots) \geq 0$（或 ≤ 0）的形式
2. 求 F 的驻点（和边界上的值）
3. 比较得出 F 的最小值（或最大值），验证不等式

级数收敛性证明

常用工具：比较判别法 + p-级数/几何级数；比值/根值判别法；单调有界原理。

例

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$

1. $1 < a_n < 1 + \ln n$
2. $\sum u_n$ 收敛，并求其和

例

对有界闭区域 D，假设 z = z(x , y) 中必有 $z_{xx} + z_{yy} = 0, z_{xy} = z_{yx} \neq 0$。证明，z 的最值只能在 D 的边界上取到

全册公式速查表（一）

板块	核心公式	易错点
空间几何	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$ 法向量，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0 \iff$ 共面	叉积中间项负号
多元微分	$dz=f_x dx+f_y dy$，$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$	偏导存在 $\nRightarrow$ 可微
重积分	$d\sigma=r dr d\theta$（极），$dV=\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$（球）	不要忘 r 或 $\rho^2\sin\varphi$
线面积分	$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt$，$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$	第二类方向取正负号

全册公式速查表（二）

板块	核心公式	易错点
格林	$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$	正向 ＝ 逆时针，有奇点要挖洞
高斯	$\oiint_\Sigma = \iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV$	闭曲面取外侧
斯托克斯	$\oint_L = \iint_\Sigma \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$	右手法则定方向
级数收敛	$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 或 $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$	端点必须单独检查!
幂级数	$R = \lim \lvert a_n / a_{n+1} \rvert$	收敛域含端点判定
傅里叶	$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx$	注意半幅延拓的奇偶性

考试策略提醒

做题顺序建议

1. **先做会做的**：不要在一道题上卡太久
2. **对称性优先**：看到对称区域/函数，先考虑能否用对称性化为零或简化
3. **三大公式判断**：封闭曲线 $\to$ 格林；封闭曲面 $\to$ 高斯；空间曲线围曲面 $\to$ 斯托克斯
4. **坐标系选择**：圆/球 $\to$ 极/柱/球坐标；直角区域 $\to$ 直角坐标
5. **级数端点必查**：幂级数求出 R 后，别忘了检查端点收敛性

结语

祝大家期末顺利！