

普物辅学讲义 I (预备知识 动量 转动)

一、预备知识

1、矢积

设空间中有两向量 $\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, 则二者的矢积定义为:

• 几何意义:

说明:

• 例 1.1 验证 $(\mu\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, 即矢量叉乘后所得向量垂直于原向量张成的空间。

• 我们熟悉的公式

2、微分方程的解法

① 直接分离法

② 猜解法

3、小量近似

题目中经常出现 $M \gg m, R \gg L$ 之类的话语, 我们在作近似时常常将他们打包在一起, 写成 $\alpha = \frac{m}{M}, \beta = \frac{L}{R}$, 此时 $\alpha、\beta$ 远小于 1 就可以用泰勒展开等手段进行处理。如作业中的一道题, 分离角度 θ 满足

$$\frac{m \sin^2 \theta + M}{m + M} \cdot \cos \theta = 2(1 - \cos \theta)$$

二、动量

例 2.1

如图, 有一个光滑定滑轮固定在天花板, 轻绳跨过定滑轮, 绳子两端等高处有一只胖猴和瘦猴, 两猴身高相同, 胖猴使劲沿绳向上爬, 瘦猴懒洋洋地挂在绳子上。问: 吊在滑轮下边的香蕉归谁所有?

2、变质量问题

- 增质型: (航行在太空尘埃中的宇宙飞船)

- 减质型: (喷气式发动机) $dm < 0$

二者具有统一形式:

例 2.2

如图，定滑轮固定在天花板上，一轻绳跨过定滑轮，一端连接着一个物块，其质量为 m_1 ，另一端连接着一个水桶，水桶和水的初始总质量为 m_2 ，水桶在向外冒水，流速为 $\mu(kg \cdot s^{-1})$ ，水流相对桶的速度为 u ，初始时刻 $m_1 > m_2$ ，求绳上张力 T 。

三、转动**1、何为转动****2、转动惯量**

① 杆及其衍生物

② 圆柱及其衍生物

③ 球

3、刚体的定轴转动

• 定轴转动任一点的速度：

• 定轴转动的动能：

平行轴定理：

任一点的加速度：

角动量：

4、角动量

- 角动量是相对空间某固定点定义的，对于定轴转动的刚体这个点可以是轴上任一点。
- 角动量定理（转动定律）：

5、刚体平面平行运动

- 刚体上任一点运动的分解：
- 纯滚动条件：

例 3.1

如图一个半径为 R 的实心圆柱置于倾角为 θ 的斜面上，圆柱与斜面的摩擦因数为 μ ，求临界角 θ_c 使得当 $\theta > \theta_c$ 时圆柱无法实现纯滚动。（斜面足够长）

例 3.2

如图所示，一个质量为 M 半径为 R 的定滑轮悬挂在天花板上，一轻绳跨过定滑轮，一端连接着一个物块，其质量为 m_1 ，另一端连接着一个水桶，水桶和水的初始总质量为 m_2 ，水桶在向外冒水，流速为 $\mu(kg \cdot s^{-1})$ ，水流相对桶的速度为 u ，初始时刻 $m_1 > m_2$ ，求绳上张力 T 和桶的加速度。设绳子与滑轮之间没有相对滑动。

例 3.3

如图，一根长为 L ，质量为 m 的杆两端挂线等高的悬挂在天花板上，现在突然剪短左侧的线，求剪断瞬间右侧线的拉力。

例 3.4

如图，一根长为 L ，质量为 m 的杆件一端固定在天花板上，并可以绕固定轴旋转，初始杆件为水平状态，随后释放。当杆运动到竖直状态时，其下端击中放在水平面上质量同为 m 的小球，发生弹性碰撞，求碰撞后小球的速度。